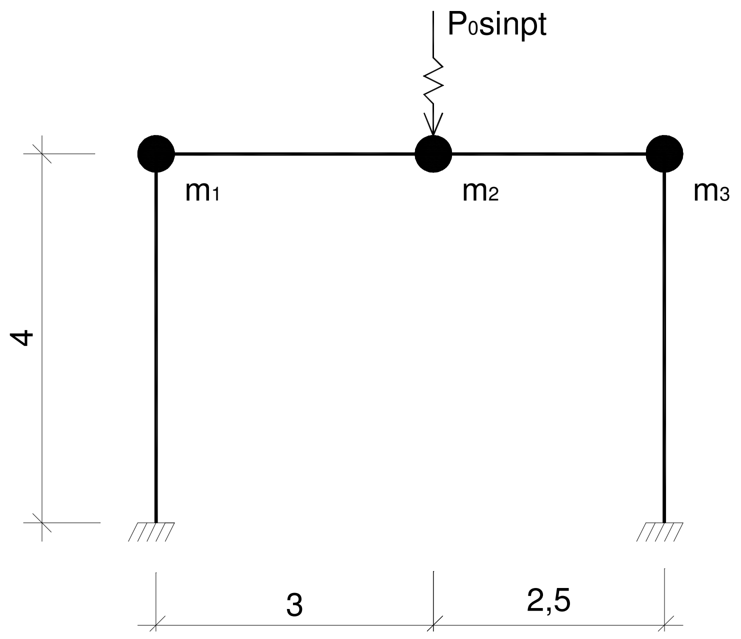
Politechnika Poznańska
Instytut Konstrukcji Budowlanych
Zakład Mechaniki Budowli

Projekt wykonał: Krzysztof Matyniak
Konsultacje: mgr inż. Anita Kaczor

DYNAMIKA – UJĘCIE KLASYCZNE

Wyznaczyc częstości i postacie drgań własnych oraz amplitudy drgań wymuszonych dla następującej ramy:



Dane:

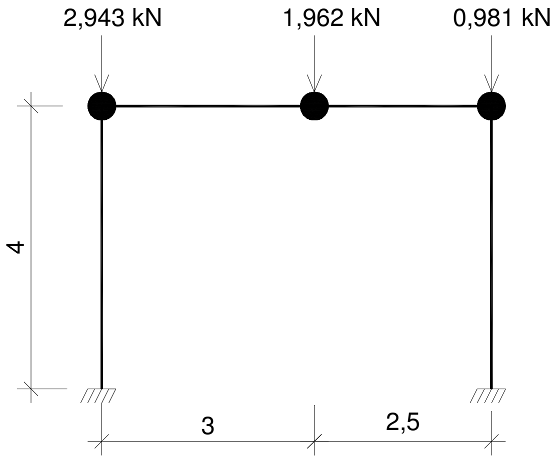
$P_0 = 18000$ N - amplituda siły wymuszającej
$p = 30$ Hz - częstotliwość siły wymuszającej
$m_1 = 300$ kg
$m_2 = 200$ kg
$m_3 = 100$ kg

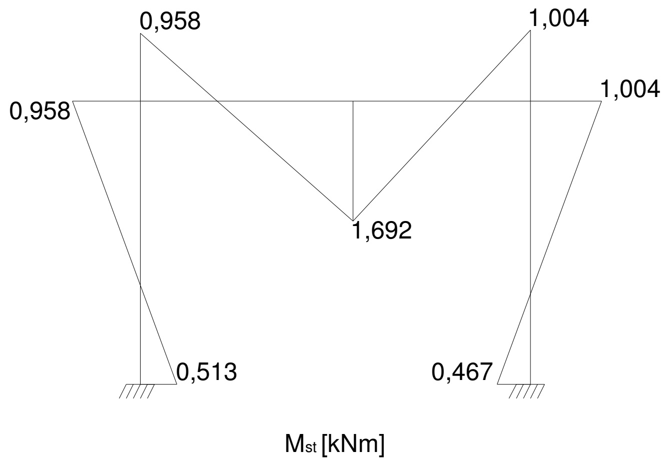
1. Dobranie przekroju

$$F_1 = 300kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 2943N = 2{,}943kN$$

$$F_2 = 200kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 1962N = 1{,}962kN$$

$$F_3 = 100kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 981N = 0{,}981kN$$



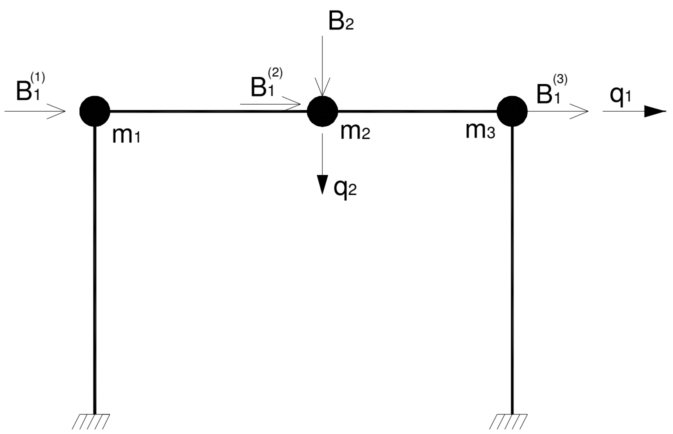


$$\sigma_{dop} = 100MPa$$

$$\frac{M}{W} \le \sigma_{dop} \Rightarrow W \ge \frac{M}{\sigma_{dop}} = \frac{0{,}001693}{100} = 0{,}00001693\,m^3 = 16{,}93cm^3$$

Z tablic dobieram I80: W = 19,45 cm^3
I = 77,80 cm^4
A = 7,58 cm^2
EI = 159,49 kNm^2 = 159490 Nm^2

2. Częstości i postacie drgań własnych.



$$B_1^{(1)} = -m_1 \cdot \ddot{q}_1$$
$$B_1^{(2)} = -m_2 \cdot \ddot{q}_1$$
$$B_1^{(3)} = -m_3 \cdot \ddot{q}_1$$
$$B_2 = -m_2 \cdot \ddot{q}_2$$

$$B_1 = B_1^{(1)} + B_1^{(2)} + B_1^{(3)}$$
$$B_1 = -(m_1 + m_2 + m_3)\cdot \ddot{q}_1$$

SSD = 2

Różniczkowe równania ruchu:

$$\begin{cases} q_1 = q_1(B_1^{(1)}) + q_1(B_1^{(2)}) + q_1(B_1^{(3)}) + q_1(B_2) \\ q_2 = q_2(B_1^{(1)}) + q_2(B_1^{(2)}) + q_2(B_1^{(3)}) + q_2(B_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11}B_1^{(1)} + \delta_{11}B_1^{(2)} + \delta_{11}B_1^{(3)} + \delta_{12}B_2 \\ q_2 = \delta_{21}B_1^{(1)} + \delta_{21}B_1^{(2)} + \delta_{21}B_1^{(3)} + \delta_{22}B_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = \delta_{11}B_1 + \delta_{12}B_2 \\ q_2 = \delta_{21}B_1 + \delta_{22}B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + \delta_{11} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{q}_1 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot \ddot{q}_2 = 0 \\ q_2 + \delta_{21} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{q}_1 + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot \ddot{q}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cdot \sin\omega t \\ q_2 = A_2 \cdot \sin\omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{q}_1 = -A_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t \\ \ddot{q}_1 = -A_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t \end{cases}$$

gdzie: ω- częstość drgań własnych
A_i - amplituda drgań

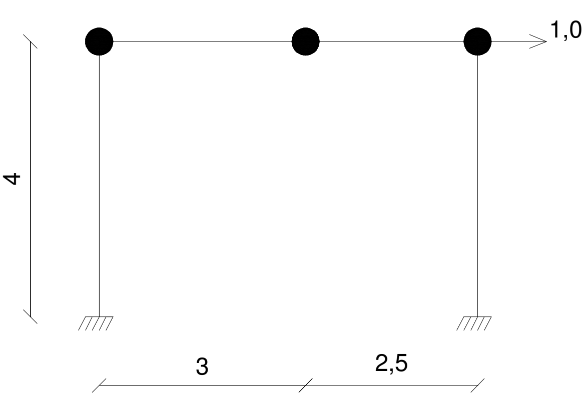
$$\begin{cases} A_1 \cdot \sin\omega t - \delta_{11} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot A_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin pt - \delta_{12} \cdot m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t = 0 \\ A_2 \cdot \sin\omega t - \delta_{21} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot A_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t - \delta_{22} \cdot m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t = 0 \end{cases}$$

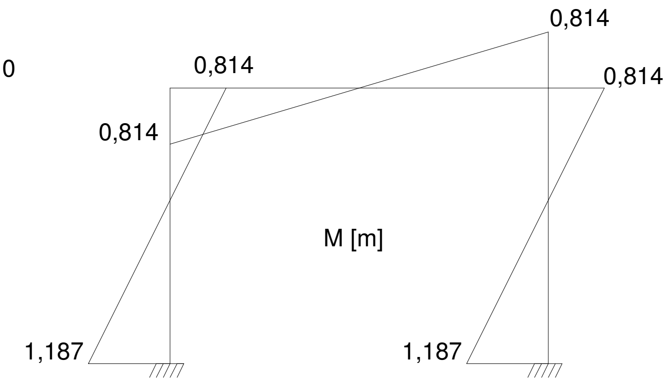
$$\begin{cases} A_1 \cdot (1 - \delta_{11} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \omega^2) - A_2 \cdot \delta_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2 = 0 \\ -A_1 \cdot \delta_{21} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \omega^2 + A_2 (1 - \delta_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2) = 0 \end{cases}$$

Obliczenie współczynników podatności

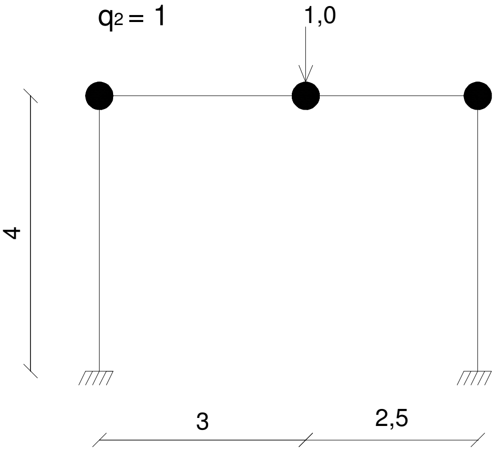
$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} dx$$

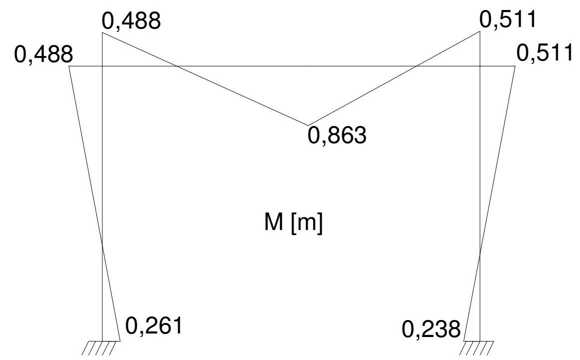
$q_1 = 1$





$q_2 = 1$





$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{4}{6} (2 \cdot 1{,}187 \cdot 1{,}187 + 2 \cdot 0{,}814 \cdot 0{,}814 - 1{,}187 \cdot 0{,}814 - 1{,}187 \cdot 0{,}814) + \right.$$
$$+ \frac{5{,}5}{6} (2 \cdot 0{,}814 \cdot 0{,}814 + 2 \cdot 0{,}814 \cdot 0{,}814 - 0{,}814 \cdot 0{,}814 - 0{,}814 \cdot 0{,}814) +$$
$$\left. + \frac{4}{6} (2 \cdot 1{,}187 \cdot 1{,}187 + 2 \cdot 0{,}814 \cdot 0{,}814 - 1{,}187 \cdot 0{,}814 - 1{,}187 \cdot 0{,}814) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{4{,}162351}{EI}$$

$$\delta_{12}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{4}{6}(-2\cdot 1{,}187\cdot 0{,}261-2\cdot 0{,}814\cdot 0{,}488+1{,}187\cdot 0{,}488+0{,}814\cdot 0{,}261)+\right.$$
$$+\frac{3}{6}(-2\cdot 0{,}814\cdot 0{,}488-2\cdot 0{,}074\cdot 0{,}863+0{,}814\cdot 0{,}863+0{,}074\cdot 0{,}488)+$$
$$+\frac{2{,}5}{6}(-2\cdot 0{,}074\cdot 0{,}863+2\cdot 0{,}814\cdot 0{,}511+0{,}074\cdot 0{,}511-0{,}814\cdot 0{,}863)+$$
$$\left.+\frac{4}{6}(2\cdot 0{,}814\cdot 0{,}511+2\cdot 1{,}187\cdot 0{,}238-0{,}814\cdot 0{,}283-1{,}187\cdot 0{,}511)\right]$$
$$\delta_{12}=-\frac{0{,}09249}{EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\cdot\left[\frac{4}{6}(2\cdot 0{,}261\cdot 0{,}261+2\cdot 0{,}488\cdot 0{,}488-0{,}261\cdot 0{,}488-0{,}488\cdot 0{,}261)+\right.$$
$$+\frac{3}{6}(2\cdot 0{,}488\cdot 0{,}488+2\cdot 0{,}863\cdot 0{,}863-0{,}488\cdot 0{,}863-0{,}863\cdot 0{,}488)+$$
$$+\frac{2{,}5}{6}(2\cdot 0{,}863\cdot 0{,}863+2\cdot 0{,}511\cdot 0{,}511-0{,}863\cdot 0{,}511-0{,}511\cdot 0{,}863)+$$
$$\left.+\frac{4}{6}(2\cdot 0{,}511\cdot 0{,}511+2\cdot 0{,}238\cdot 0{,}238-0{,}511\cdot 0{,}283-0{,}238\cdot 0{,}511)\right]$$
$$\delta_{22}=\frac{1{,}532575}{EI}$$

Przyjmuje masę porównawczą:

$m_2 = M$;

$(m_1+m_2+m_3) = 3M$

$$\begin{cases} A_1\cdot(1-\delta_{11}\cdot 3\cdot M\cdot\omega^2)-A_2\cdot\delta_{12}\cdot M\cdot\omega^2=0\\ -A_1\cdot\delta_{21}\cdot 3\cdot M\cdot\omega^2+A_2(1-\delta_{22}\cdot M\cdot\omega^2)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1\cdot(1-4{,}162351\cdot 3\cdot\frac{M}{EI}\cdot\omega^2)-A_2\cdot(-0{,}09249)\cdot\frac{M}{EI}\cdot\omega^2=0\\ -A_1\cdot(-0{,}09249)\cdot 3\cdot\frac{M}{EI}\cdot\omega^2+A_2(1-1{,}532575\cdot\frac{M}{EI}\cdot\omega^2)=0\end{cases}$$

Podstawiam za $\frac{M}{EI}\cdot\omega^2=\lambda$

$$\begin{cases} A_1\cdot(1-4{,}162351\cdot 3\cdot\lambda)-A_2\cdot(-0{,}09249)\cdot\lambda=0\\ -A_1\cdot(-0{,}09249)\cdot 3\cdot\lambda+A_2(1-1{,}532575\cdot\lambda)=0\end{cases}$$

Otrzymany układ ma postać uogólnionego problemu własnego.
Jest to układ równań jednorodnych, który posiada rozwiązanie, gdy jego wyznacznik główny równy jest 0.

$$\det\begin{bmatrix}(1-12{,}48705\lambda) & 0{,}09249\lambda\\ 0{,}27747\lambda & (1-1{,}532575\lambda)\end{bmatrix}=0$$

$$(1-12{,}48705\cdot\lambda)\cdot(1-1{,}532575\cdot\lambda)-(0{,}27747\cdot\lambda)\cdot(0{,}09249\cdot\lambda)=0$$
$$19{,}11169\lambda^2-14{,}0196\lambda+1=0$$

$\Delta=120{,}1033$ $\qquad\sqrt{\Delta}=10{,}95916$

Układ posiada rozwiązanie dla:

$$\begin{matrix}\lambda_1=0{,}080068\\ \lambda_2=0{,}653495\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{\lambda\cdot EI}{M}}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}\omega_1=7{,}99\ rad/s\\ \omega_2=22{,}82\ rad/s\end{matrix}$$

Postacie drgań własnych.

$\omega_1 \Leftrightarrow \lambda_1$

A_1=1,0

$$(1-12{,}48705\cdot\lambda_1)+A_2\cdot(0{,}09249)\cdot\lambda_1=0$$

$$(1-12{,}48705\cdot 0{,}080068)+A_2\cdot(0{,}09249)\cdot 0{,}080068=0 \qquad \Rightarrow A_2= -\ 0{,}025324$$

Z drugiego równania otrzymujemy:

$$(0{,}27747)\cdot\lambda_1+A_2\cdot(1-1{,}532575\cdot\lambda_1)=0$$

$$(0{,}27747)\cdot 0{,}080068_1+A_2\cdot(1-1{,}532575\cdot 0{,}080068)=0 \qquad \Rightarrow A_2= -\ 0{,}025324$$

$\omega_2 \Leftrightarrow \lambda_2$

A_1=1,0

$$(1-12{,}48705\cdot\lambda_2)+A_2\cdot(0{,}09249)\cdot\lambda_2=0$$

$$(1-12{,}48705\cdot 0{,}653495)+A_2\cdot(0{,}09249)\cdot 0{,}653495=0 \qquad \Rightarrow A_2= 118{,}46493$$

gdy przyjmiemy że A_2 = 1,0 to A_1=0,0084

Z drugiego równania otrzymujemy:

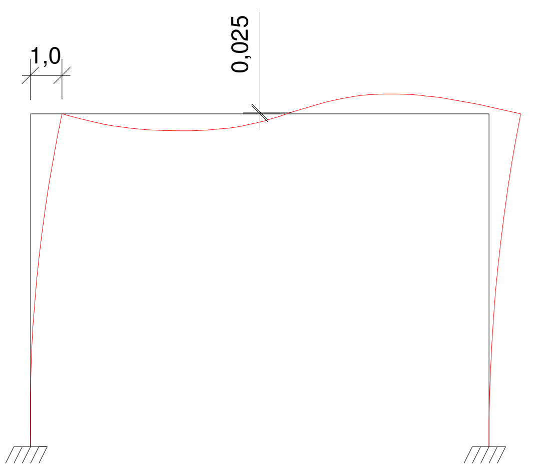
$$(0{,}27747)\cdot\lambda_2+A_2\cdot(1-1{,}532575\cdot\lambda_2)=0$$

$$(0{,}27747)\cdot 0{,}653495+A_2\cdot(1-1{,}532575\cdot 0{,}653495)=0 \qquad \Rightarrow A_2= 118{,}46493$$

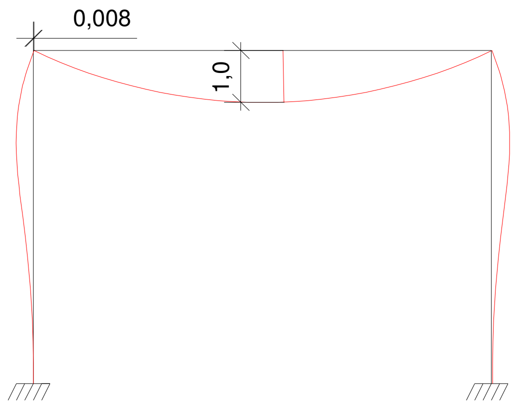
Sprawdzenie ortogonalności:

$$A_1^1\cdot A_1^2\cdot 3M+A_2^1\cdot A_2^2\cdot M=0$$

$$1\cdot 1\cdot 600+(-0{,}025324)\cdot 118{,}46493\cdot 200=2{,}7\cdot 10^{-10}\approx 0$$

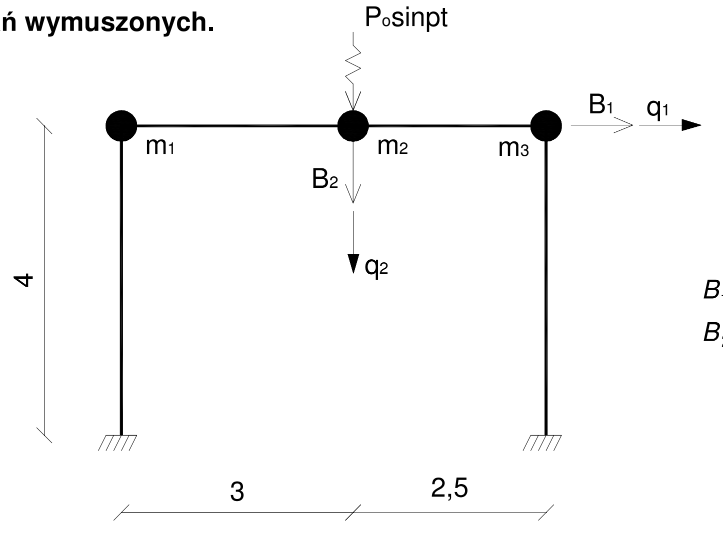


I postać drgań drgań własnych



II postać drgań drgań własnych

3. Amplitudy drgań wymuszonych.



$$B_1 = -(m_1 + m_2 + m_3)\cdot \ddot{q}_1$$
$$B_2 = -m_2 \cdot \ddot{q}_2$$

Dane:

P_0 = 18000 N amplituda siły wymuszającej

p = 30 Hz = $30 \cdot 2 \cdot \pi = 188{,}5 \dfrac{rad}{s}$ częstotliwość siły wymuszającej

m_1 = 300 kg

m_2 = 200 kg

m_3 = 100 kg

EI = 159,49 kNm = 159490 Nm

$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11}\cdot B_1 + \delta_{12}\cdot B_2 + \delta_{12}\cdot P(t) \\ q_2 = \delta_{21}\cdot B_1 + \delta_{22}\cdot B_2 + \delta_{22}\cdot P(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 + \delta_{11}\cdot(m_1+m_2+m_3)\cdot\ddot{q}_1 + \delta_{12}\cdot m_2\cdot\ddot{q}_2 = \delta_{12}P(t) \\ q_2 + \delta_{21}\cdot(m_1+m_2+m_3)\cdot\ddot{q}_1 + \delta_{22}\cdot m_2\cdot\ddot{q}_2 = \delta_{22}P(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = A_1\cdot\sin pt \\ q_2 = A_2\cdot\sin pt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 = -A_1\cdot p^2\cdot\sin pt \\ \ddot{q}_1 = -A_1\cdot p^2\cdot\sin pt \end{cases}$$

Przyjmuje masę porównawczą:

m_2 = M

$(m_1+m_2+m_3)$ = 3M

$$\begin{cases} A_1\cdot\sin pt - \delta_{11}\cdot 3M\cdot A_1\cdot p^2\cdot\sin pt - \delta_{12}\cdot M\cdot A_2\cdot p^2\cdot\sin pt = \delta_{12}\cdot P_0\sin pt \\ A_2\cdot\sin pt - \delta_{21}\cdot 3M\cdot A_1\cdot p^2\cdot\sin pt - \delta_{22}\cdot M\cdot A_2\cdot p^2\cdot\sin pt = \delta_{22}\cdot P_0\sin pt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1\cdot(1-\delta_{11}\cdot 3M\cdot p^2) - A_2\cdot\delta_{12}\cdot M\cdot p^2 = \delta_{12}P_0 \\ -A_1\cdot\delta_{21}\cdot 3M\cdot p^2 + A_2(1-\delta_{22}\cdot M\cdot p^2) = \delta_{22}P_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1\cdot(1-4{,}162351\cdot 3\cdot\dfrac{M}{EI}\cdot p^2) - A_2\cdot(-0{,}09249)\cdot\dfrac{M}{EI}\cdot p^2 = \dfrac{-0{,}09249}{EI}P_0 \\ -A_1\cdot(-0{,}09249)\cdot 3\cdot\dfrac{M}{EI}\cdot p^2 + A_2(1-1{,}532575\cdot\dfrac{M}{EI}\cdot p^2) = \dfrac{1{,}532575}{EI}P_0 \end{cases}$$

Po podstawieniu danych w jednostkach podstawowych otrzymuję:

$$\begin{cases} A_1\cdot(1-4{,}162351\cdot 3\cdot\dfrac{200}{159490}\cdot 188{,}5^2) - A_2\cdot(-0{,}09249)\cdot\dfrac{200}{159490}\cdot 188{,}5^2 = \dfrac{-0{,}09249}{159490}\cdot 18000 \\ -A_1\cdot(-0{,}09249)\cdot 3\cdot\dfrac{200}{159490}\cdot 188{,}5^2 + A_2(1-1{,}532575\cdot\dfrac{200}{159490}\cdot 188{,}5^2) = \dfrac{1{,}532575}{159490}\cdot 18000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -555{,}39A_1 + 4{,}12A_2 = -0{,}01044 \\ 12{,}36A_1 - 67{,}29A_2 = 0{,}1729 \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań otrzymujemy amplitudy drgań wymuszonych:

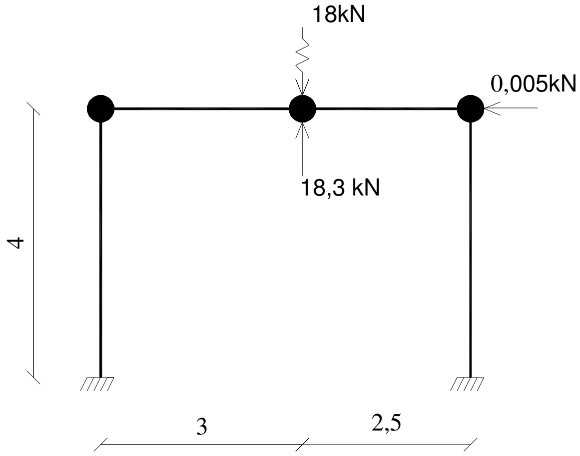
A_1 = - 0,0000002637 [m]
A_2 = - 0,002569 [m]

Obliczenie amplitudy siły bezwładności
$B_i = -m_i \cdot \ddot{q}_i = m_i \cdot p^2 \cdot A_i \cdot \sin pt$

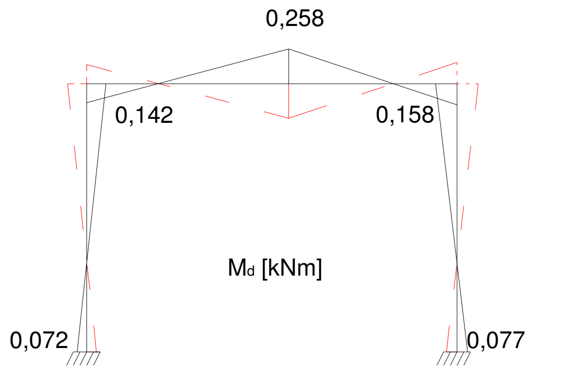
Siły dynamiczne wyznaczam dla $\sin pt = 1$

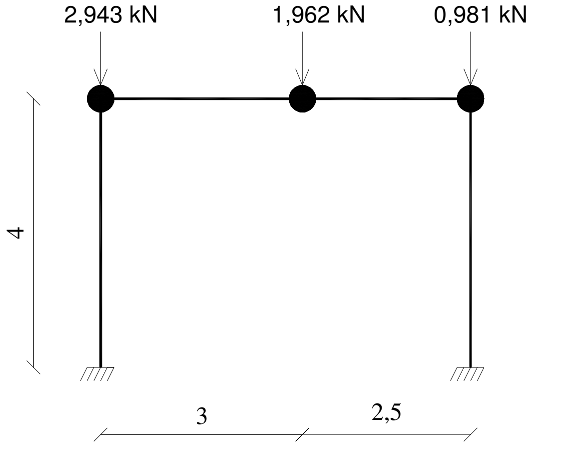
$B_1 = 600 \cdot 188{,}5^2 \cdot (-0{,}0000002637) = -5{,}6212N = -0{,}005kN$

$B_2 = 200 \cdot 188{,}5^2 \cdot (-0{,}002569) = -18260{,}19N = -18{,}3kN$

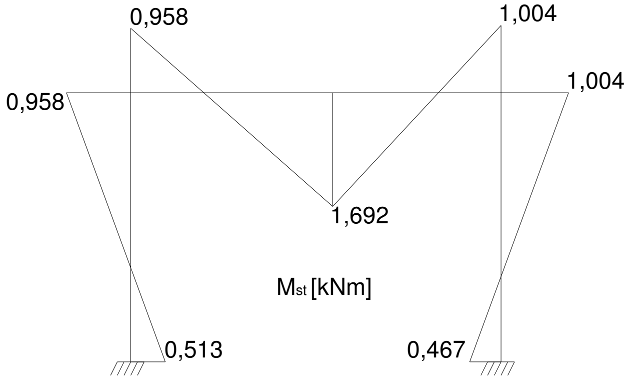


Obwiednia momentów dynamicznych





Wykres momentów od obciążenia statycznego
(pominięto ciężar własny konstrukcji)



Sprawdzenie naprężeń normalnych w przekroju.

$$M_{\max} = 1{,}2 \cdot M_{st} + 5 \cdot M_d = 1{,}2 \cdot 1{,}692 + 5 \cdot 0{,}258 = 3{,}32kNm$$

$$\frac{M_{\max}}{W} = \frac{332}{19{,}45} = 17{,}07 \frac{kN}{cm^2} = 170{,}7MPa < 215MPa$$

Ponieważ naprężenia w przekroju nie przekraczają naprężeń dopuszczalnych, możemy uznać przekrój za dobrze zaprojektowany.