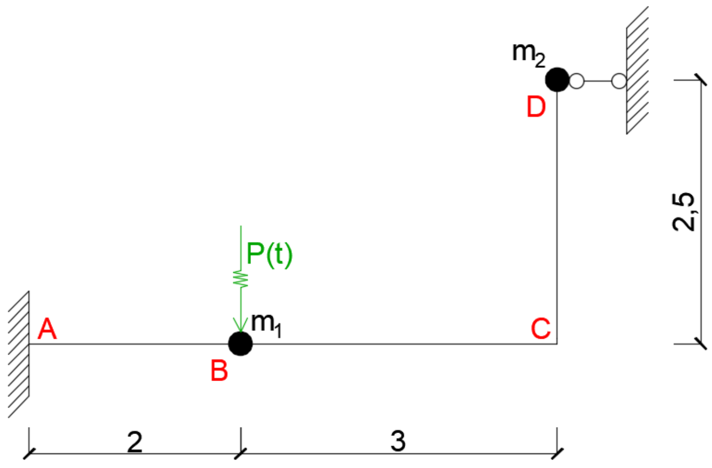
Wydział Inżynierii Lądowej i Transportu

MECHANIKA BUDOWLI – PROJEKTY
DYNAMIKA – RAMA

Prowadząca: mgr inż. Anita Kaczor

Wykonał:
Filip Maciejewski
Gr. B5
Rok akademicki 2019/2020

Schemat układu



Dane:

m_1= 140 kg

m_2 = 240 kg

P(t) = Psin(pt)

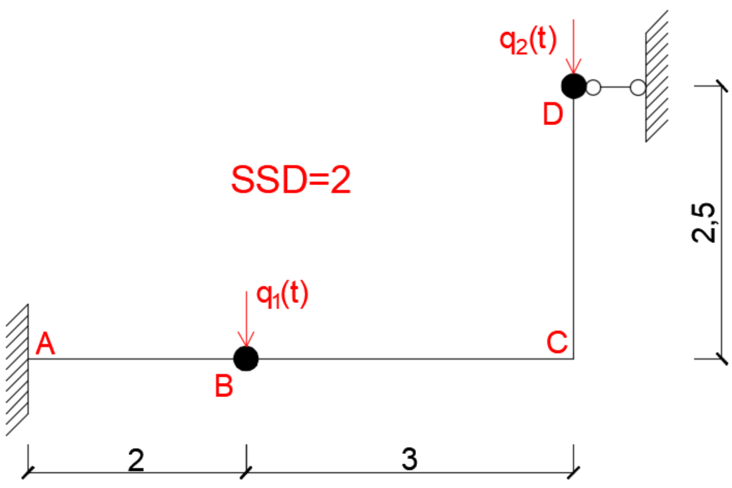
P = 12 kN

p = 83 Hz

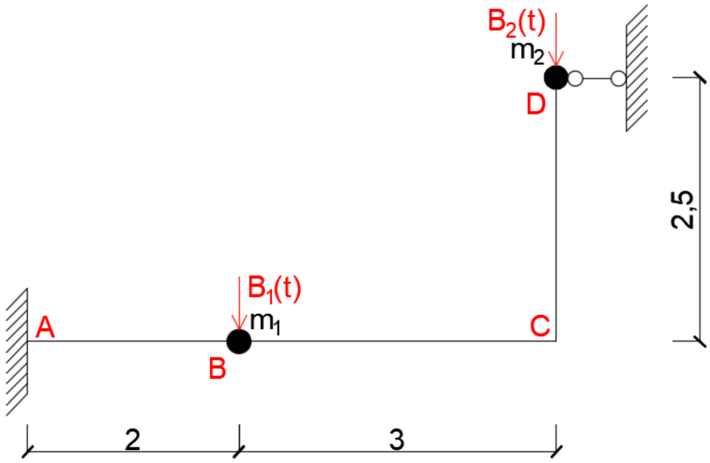
Przekrój dwuteowy 180

- I = 1450 cm^4
- E = 210 GPa
- w_x = 161 cm^3

Stopień swobody dynamicznej układu



Drgania swobodne – siły działające na układ



Równania ruchu

$$\begin{cases} q_1(t) = \delta_{11} \cdot B_1(t) + \delta_{12} \cdot B_2(t) \\ q_2(t) = \delta_{21} \cdot B_1(t) + \delta_{22} \cdot B_2(t) \end{cases}$$

$$q_1(t) = a_1 \cdot \sin(\omega t)$$
$$q_2(t) = a_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$B(t) = -m \cdot \ddot{q}(t)$$

$$B_1(t) = m_1 \cdot a_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$
$$B_2(t) = m_2 \cdot a_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

Przyjęto masę porównawczą: *m* = 10 kg

$$m_1 = 14m$$
$$m_2 = 24m$$

$$\begin{cases} a_1 = \delta_{11} \cdot 14m \cdot a_1 \cdot \omega^2 + \delta_{12} \cdot 24m \cdot a_2 \cdot \omega^2 \\ a_2 = \delta_{21} \cdot 14m \cdot a_1 \cdot \omega^2 + \delta_{22} \cdot 24m \cdot a_2 \cdot \omega^2 \end{cases}$$

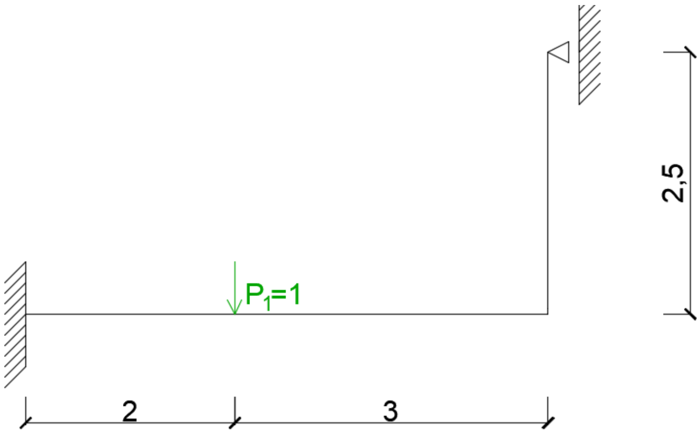
$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} dx$$

gdzie M_i, M_k - wykresy momentów zginających od jednostkowych sił B_1 i B_2.

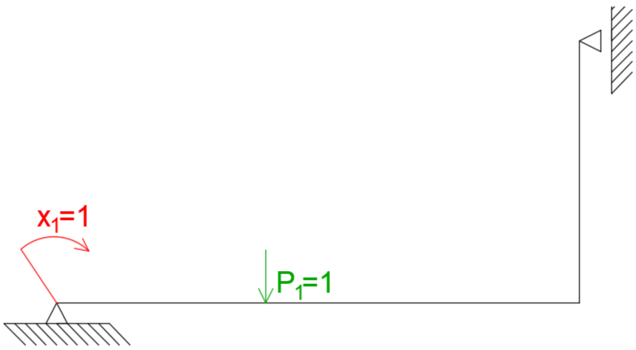
Układ jest statycznie niewyznaczalny – wykresy momentów zginających wyznaczymy metodą sił.

Wyznaczenie wykresu M1 metodą sił

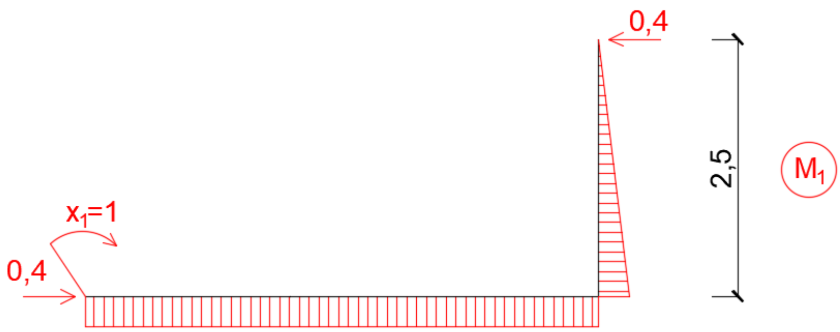
Schemat zadania do rozwiązania:



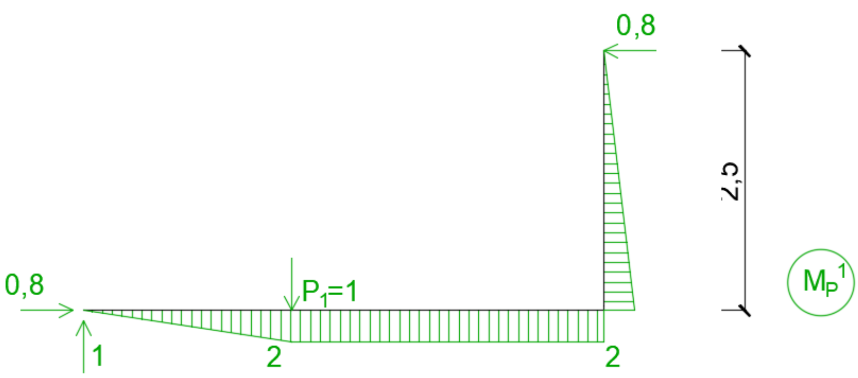
Układ podstawowy metody sił



Stan X_1=1



Stan P

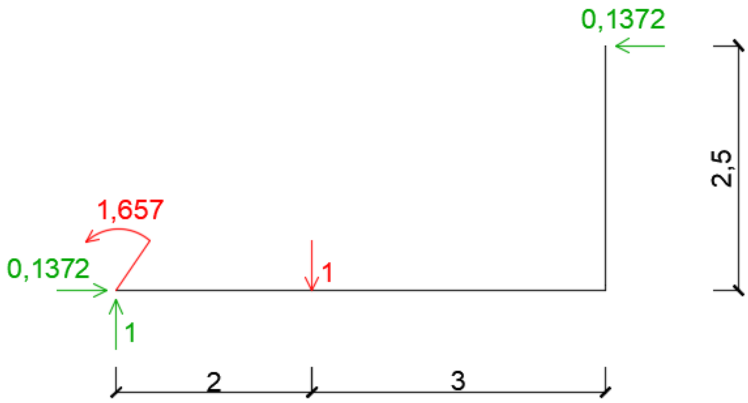


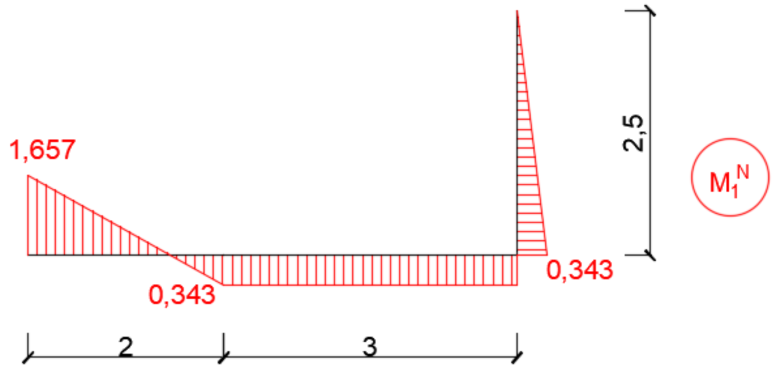
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(1 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) = \frac{5{,}833}{EI}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 2\cdot \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{9{,}667}{EI}$$

$$\delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{1P} = 0$$

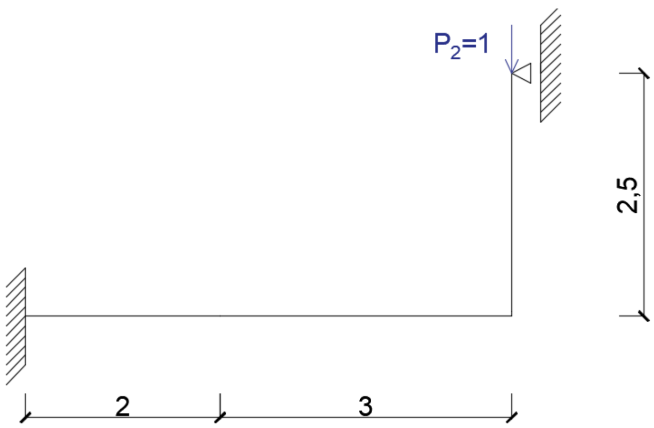
$$X_1 = -1{,}657$$



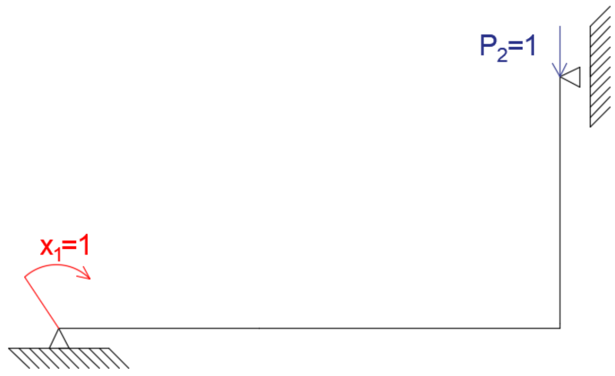


Wyznaczenie wykresu M_2 metodą sił

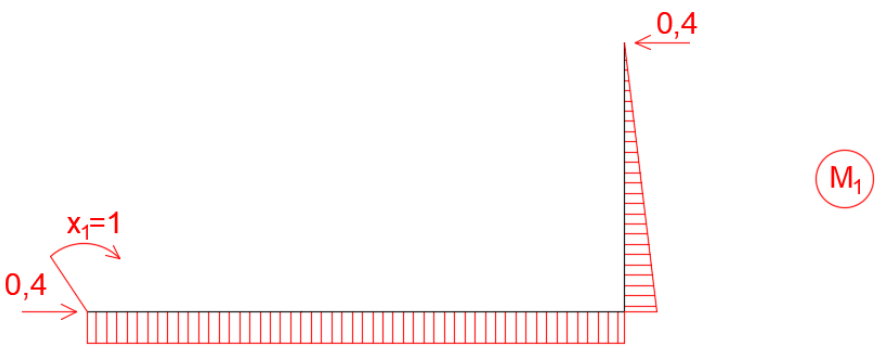
Schemat zadania do rozwiązania:



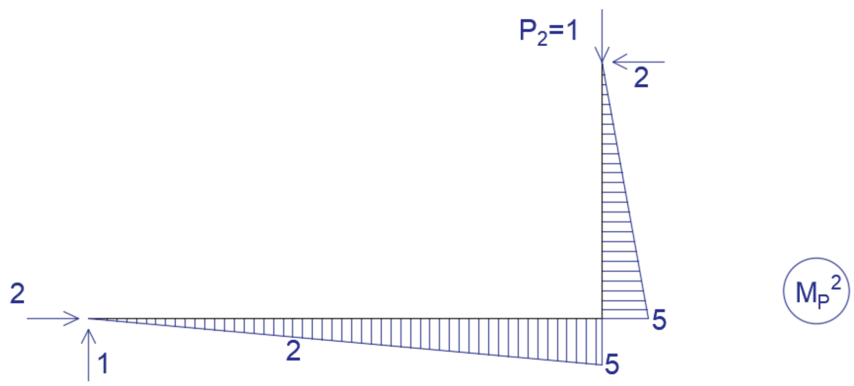
Układ podstawowy metody sił



Stan X_1=1



Stan P

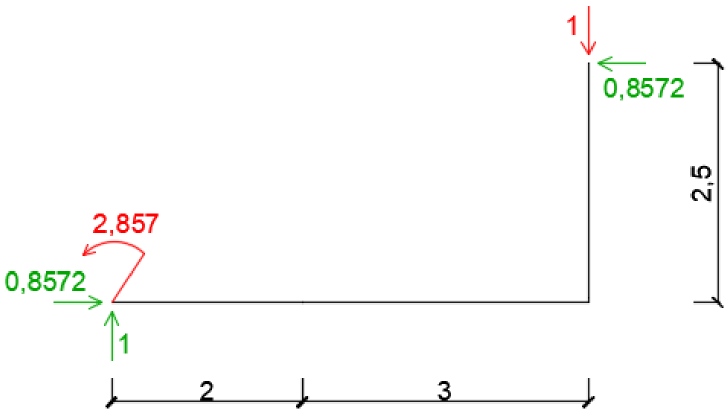


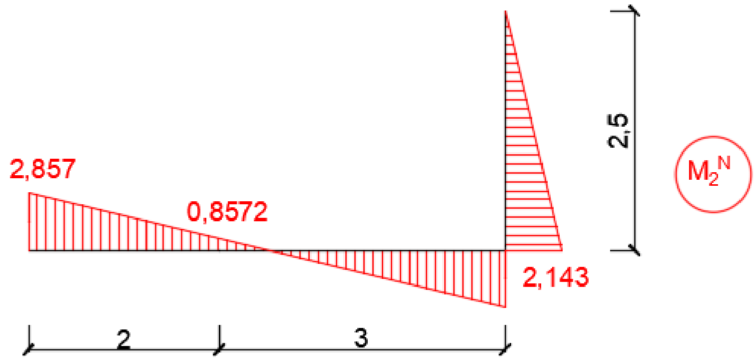
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(1 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) = \frac{5{,}833}{EI}$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\right) = \frac{16{,}67}{EI}$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0$$

$$X_1 = -2{,}857$$





Współczynnik δ_{ik} potrzebne do rozwiązania równań ruchu obliczamy metodą prac wirtualnych. Dla uproszczenia obliczeń wykorzystujemy twierdzenie redukcyjne.

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1\ M_1^N}{EI} dx = \int \frac{M_P^1 M_1^N}{EI} dx$$
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 1{,}657 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 2\right) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}343 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 3 \cdot 0{,}343 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}343 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\right) = \frac{1{,}982}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{M_2\ M_2^N}{EI} ds = \int \frac{M_P^2 M_2^N}{EI} ds$$
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}857 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 5\right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}143 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}143 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5\right) = \frac{14{,}88}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{M_1^N M_2}{EI} ds = \int \frac{M_1^N M_P^2}{EI} ds$$
$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 1{,}657 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 2\right) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}343 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 3 \cdot 0{,}343 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}343 \cdot 3 * \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}343\right) = \frac{4{,}383}{EI}$$

Do układu równań dynamicznych podstawiamy współczynniki δ_{ik} oraz wprowadzamy stałą:

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{EI}$$

$$\begin{cases} a_1 = 14 \cdot 1{,}982 \cdot a_1 \cdot \lambda + 24 \cdot 4{,}383 \cdot a_2 \cdot \lambda \\ a_2 = 14 \cdot 4{,}383 \cdot a_1 \cdot \lambda + 24 \cdot 14{,}88 \cdot a_2 \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 27{,}74 \cdot a_1 \cdot \lambda + 105{,}1 \cdot a_2 \cdot \lambda \\ a_2 = 61{,}36 \cdot a_1 \cdot \lambda + 357{,}1 \cdot a_2 \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - 27{,}74\lambda) \cdot a_1 - 105{,}1\lambda \cdot a_2 = 0 \\ -61{,}36\lambda \cdot a_1 + (1 - 357{,}1\lambda) \cdot a_2 = 0 \end{cases}$$

Otrzymano układ równań jednorodnych, który ma rozwiązanie jeżeli:

$$\begin{vmatrix} 1 - 27{,}74 \cdot \lambda & -105{,}1 \cdot \lambda \\ -61{,}36 \cdot \lambda & 1 - 357{,}1 \cdot \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Korzystamy z programy UPW i otrzymujemy wartości charakterystyczne:

$$\lambda_1 = 0{,}00266$$
$$\lambda_2 = 0{,}10870$$

Obliczenie częstości drgań własnych

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{EI} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda EI}{m}}$$

$$m = 10kg\ (masa\ porównawcza)$$

$$EI = 1450 \cdot 10^{-8} \cdot 210 \cdot 10^9 = 3045000\ Nm^2$$

$$\omega_1 = 28{,}460 \frac{rad}{s}$$
$$\omega_2 = 181{,}93 \frac{rad}{s}$$

Sprawdzenie czy układ znajduje się w strefie rezonansowej

$$0{,}75 < \frac{p}{\omega} < 1{,}25$$

$$p = 83Hz = 83 \cdot 2 \cdot \pi = 521{,}504 \frac{rad}{s}$$

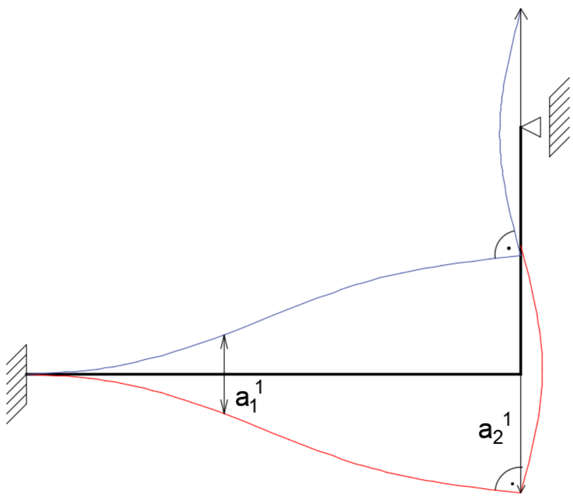
$$\frac{p}{\omega_1} = 18{,}315$$
$$\frac{p}{\omega_2} = 2{,}865$$

Wniosek: Układ znajduje się poza strefą rezonansową.

Postacie drgań własnych

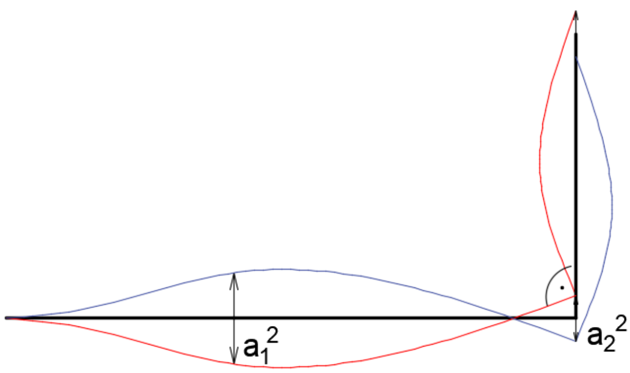
I postać

$$\lambda = 0{,}00266$$
$$a_1^1 = 1$$
$$(1 - 27{,}74 \cdot 0{,}00266) - 105{,}1 \cdot 0{,}00266 \cdot a_2^1 = 0$$
$$a_2^1 = 3{,}310$$



II postać

$$\lambda = 0{,}1087$$
$$a_1^2 = 1$$
$$(1 - 27{,}74 \cdot 0{,}1087) - 105{,}1 \cdot 0{,}1087 \cdot a_2^2 = 0$$
$$a_2^2 = -0{,}1763$$

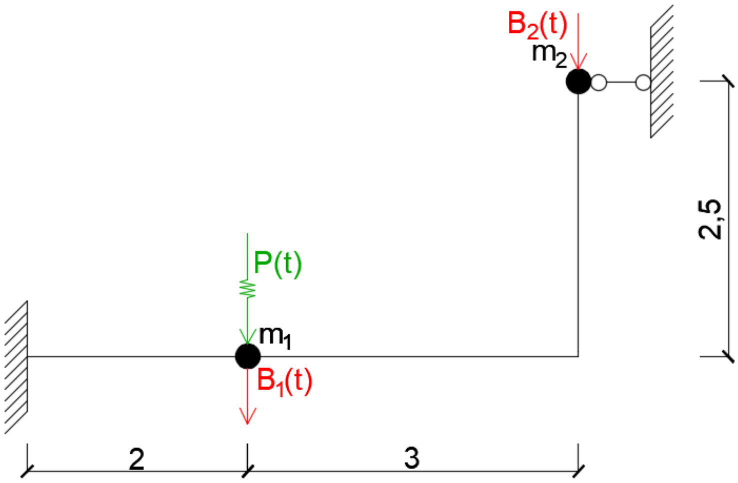


Warunek ortogonalności drgań

$$\Sigma m_i a_i^j a_i^k = 0$$
$$140 + 240 \cdot 3{,}31 * (-0{,}01763) = -0{,}0757 \approx 0$$

Drgania wymuszone

Siły działające na układ



$$P = 12000\ N$$
$$EI = 3045000\ Nm^2$$
$$p = 521{,}5\ \frac{rad}{s}$$

Równania ruchu

$$\begin{cases} q_1(t) = \sigma_{11} \cdot P_{1DYN}(t) + \sigma_{12} \cdot P_{2DYN}(t) \\ q_2(t) = \sigma_{21} \cdot P_{1DYN}(t) + \sigma_{22} \cdot P_{2DYN}(t) \end{cases}$$

$$q_1(t) = A_1 \cdot \sin(pt)$$
$$q_2(t) = A_2 \cdot \sin(pt)$$

$$B_i(t) = -m_i \cdot \ddot{q}_i(t)$$

$$\ddot{q}_1(t) = -A_1 \cdot \mathrm{p}^2 \cdot \sin(pt)$$
$$\ddot{q}_2(t) = -A_2 \cdot \mathrm{p}^2 \cdot \sin(pt)$$

$$B_1(t) = m_1 \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot \sin(pt)$$
$$B_2(t) = m_2 \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \sin(pt)$$

$$P_{1DYN}(t) = B_1(t) + P(t)$$
$$P_{2DYN}(t) = B_2(t)$$

$$P_{1DYN}(t) = m_1 \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot \sin(pt) + P(t)$$
$$P_{2DYN}(t) = m_2 \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \sin(pt)$$

$$P(t) = P \cdot \sin(pt)$$

Przyjmujemy masę porównawczą: *m*=10kg

$$m_1 = 14m$$
$$m_2 = 24m$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\begin{cases} A_1 = \delta_{11} \cdot (14m \cdot A_1 \cdot p^2 + P) + \delta_{12} \cdot 24m \cdot A_2 \cdot p^2 \\ A_2 = \delta_{21} \cdot (14m \cdot A_1 \cdot p^2 + P) + \delta_{22} \cdot 24m \cdot A_2 \cdot p^2 \end{cases}$$

Korzystamy ze wcześniej obliczonych współczynników:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{1{,}9823}{EI} \cdot (14m \cdot A_1 \cdot p^2 + P) + \dfrac{4{,}383}{EI} \cdot 24m \cdot A_2 \cdot p^2 \\ A_2 = \dfrac{4{,}383}{EI} \cdot (14m \cdot A_1 \cdot p^2 + P) + \dfrac{14{,}883}{EI} \cdot 24m \cdot A_2 \cdot p^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 24{,}787 \cdot A_1 + 0{,}007812 + 93{,}953 \cdot A_2 \\ A_2 = 54{,}806 \cdot A_1 + 0{,}017273 + 319{,}029 \cdot A_2 \end{cases}$$

$$A_1 = -0{,}0003556654m$$
$$A_2 = 7{,}14954 * 10^{-6}m$$

Siły dynamiczne

$$P_{1DYN}(t) = m_1 \cdot A_1 \cdot p^{2\cdot} \cdot \sin(pt) + P \cdot sin(pt)$$
$$P_{2DYN}(t) = m_2 \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \sin(pt)$$

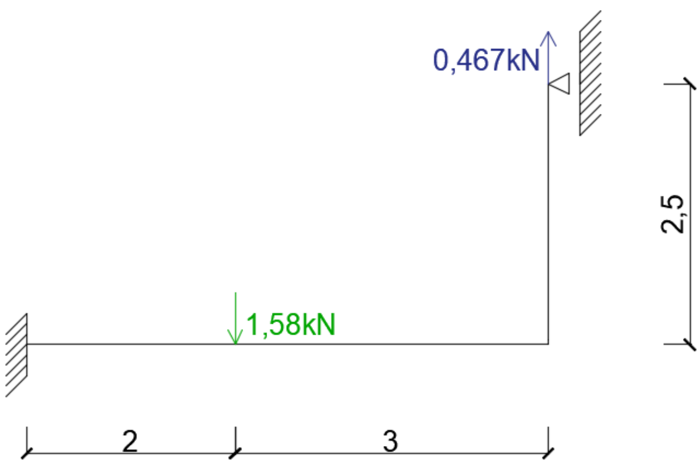
Dla $\sin(pt) = 1$ otrzymujemy:

$$P_{1DYN}(t) = 1579{,}5\ N$$
$$P_{2DYN}(t) = -466{,}6\ N$$

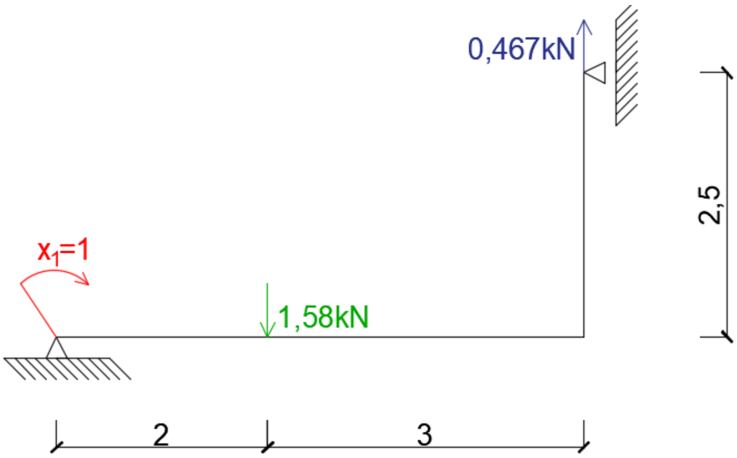
Dla $\sin(pt) = -1$ otrzymujemy:

$$P_{1DYN}(t) = -1579{,}5\ N$$
$$P_{2DYN}(t) = 466{,}6N$$

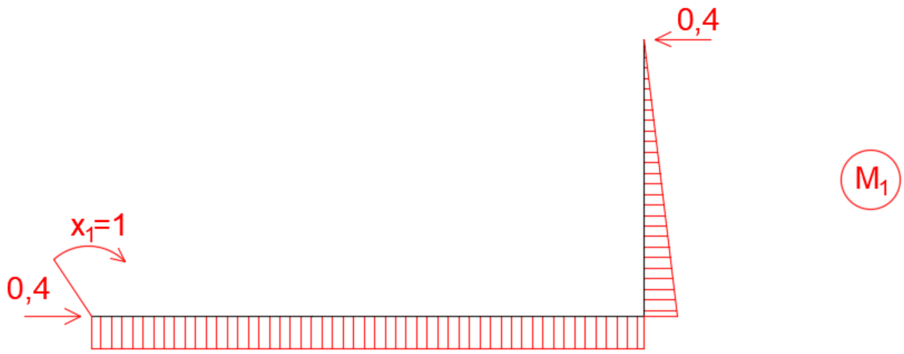
Rozwiązujemy układ od sił dynamicznych dla $\sin(pt) = 1$. Dla $\sin(pt) = -1$ wykres momentów zginających będzie odbiciem lustrzanym względem osi prętów.



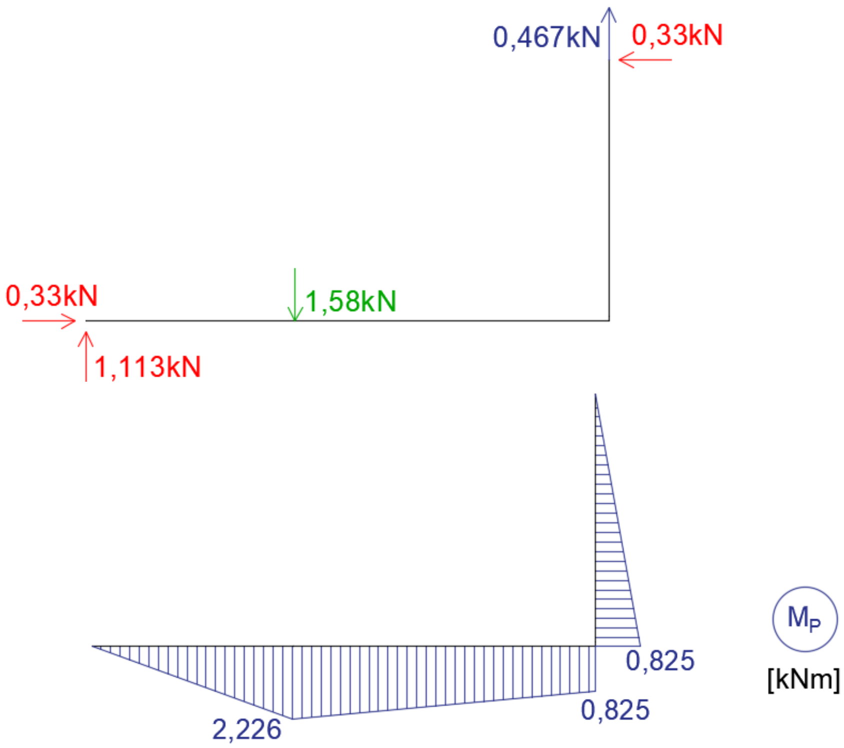
Układ podstawowy metody sił



Stan X_1=1



Stan P

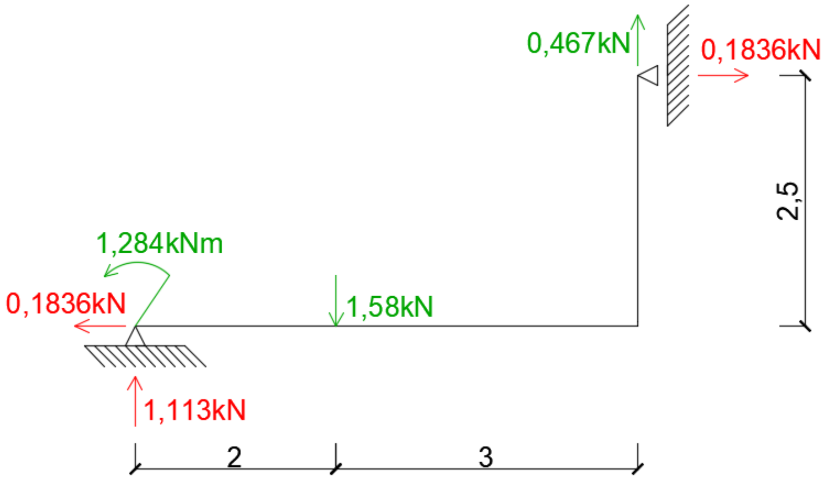


$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 2{,}226\cdot 2\cdot 1 + 2{,}226\cdot 3\cdot \frac{1}{2}\cdot 1 + 0{,}825\cdot 3\cdot \frac{1}{2}\cdot 1 + 0{,}825\cdot 2{,}5\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \frac{7{,}49}{EI}$$

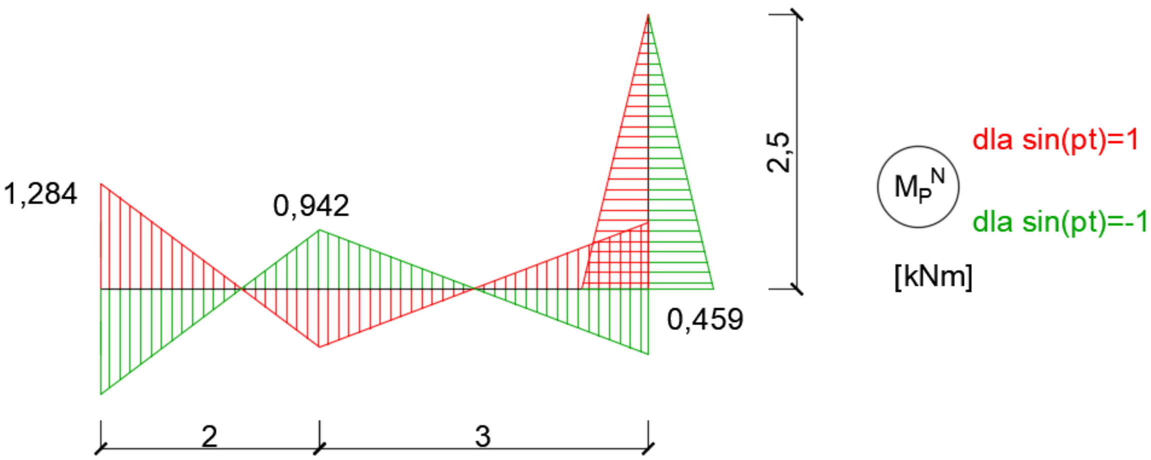
$$\delta_{11} = \frac{5{,}833}{EI}$$

$$\delta_{11}\cdot X + \delta_{1P} = 0$$

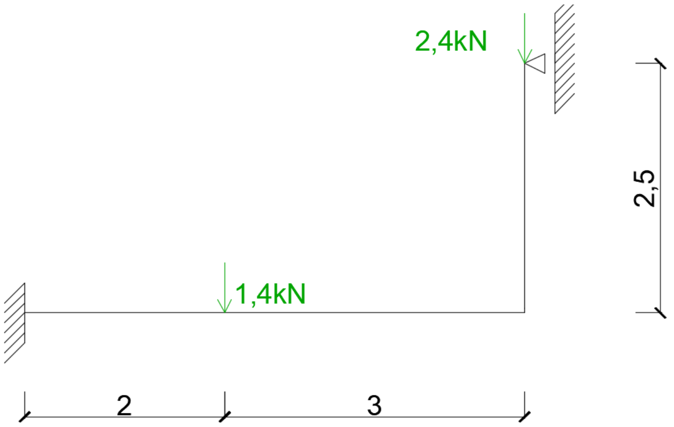
$$X_1 = -1{,}284kNm$$



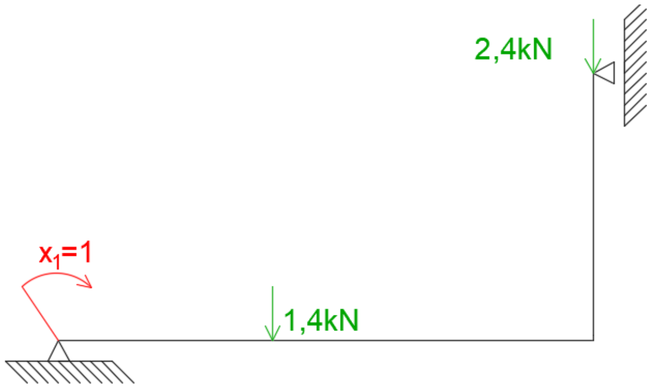
Obwiednia momentów dynamicznych



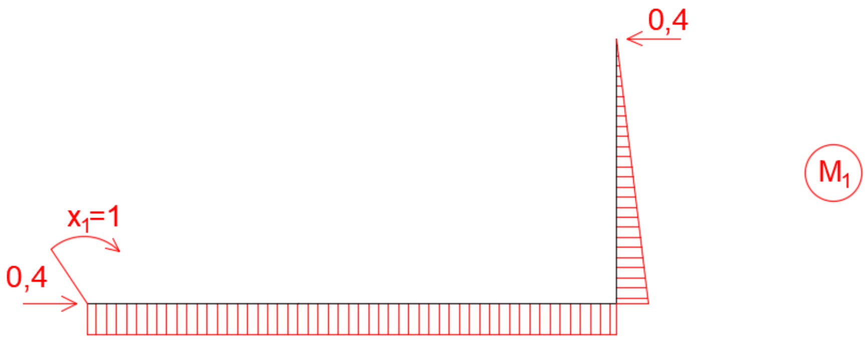
Obciążenie statyczne siłami ciężkości



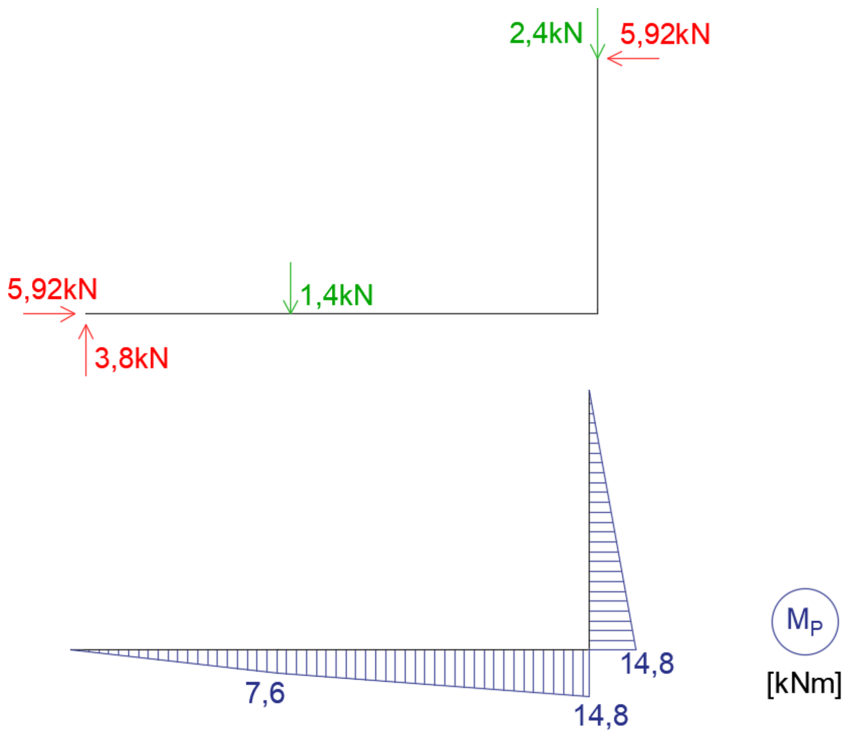
Układ podstawowy metody sił



Stan X_1=1



Stan *P*

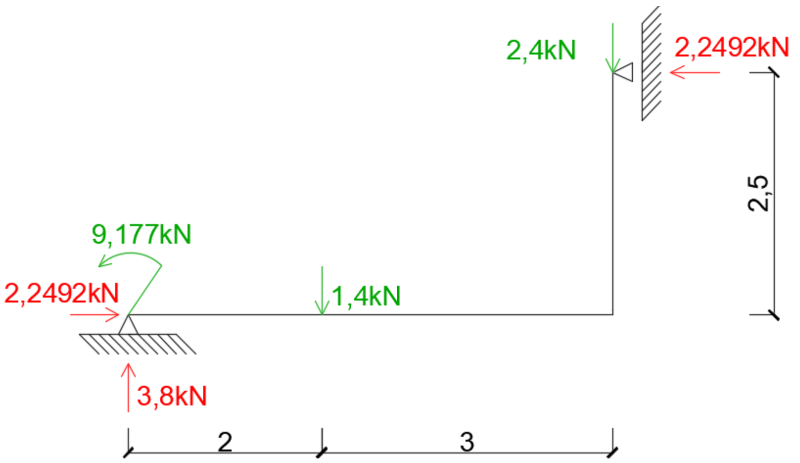


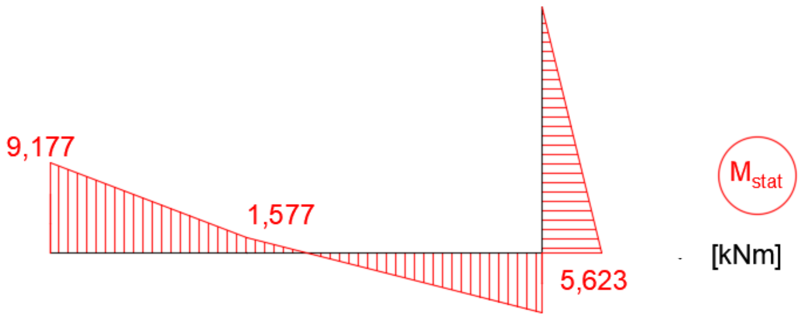
$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 7{,}6\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 7{,}6\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 14{,}8\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 14{,}8\cdot 2{,}5\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=\frac{53{,}33}{EI}$$

$$\delta_{11} = \frac{5{,}833}{EI}$$

$$\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{1P}=0$$

$$X_1 = -9{,}177kNm$$





Sprawdzenie warunku nośności

Szukamy maksymalnego momentu uwzględniając współczynniki obliczeniowe

$$1{,}2 \cdot 9{,}177 + 5 \cdot 1{,}284 = 17{,}43\ kNm$$
$$1{,}2 \cdot 1{,}577 + 5 \cdot 0{,}942 = 4{,}187\ kNm$$
$$1{,}2 \cdot 5{,}623 + 5 \cdot 0{,}459 = 9{,}043\ kNm$$

Maksymalne naprężenie

$$\sigma = \frac{17{,}43}{161}\left[\frac{kNm}{cm^3}\right] = \frac{1743}{161}\left[\frac{kNcm}{cm^3}\right] = 10{,}82\left[\frac{kN}{cm^2}\right] = 108{,}2\ MPa$$

$$\sigma_{dop} = 215\ MPa$$

$$\sigma < \sigma_{dop}$$