

MECHANIKA BUDOWLI / SEM.4

ĆWICZENIE NR 2

DYNAMIKA - UJĘCIE KLASYCZNE

Termin oddania: 17.06.2025

Data	Uwagi sprawdzającego	Podpis

~~ opracowanie: mgr inż. Anita Kaczor ~ <https://anita.kaczor.pracownik.put.poznan.pl> ~

Dla zadanej **BELKI** oraz **RAMY**:

1. Obliczyć częstotliwości drgań własnych i sprawdzić, czy układ jest w strefie rezonansowej. Narysować postacie drgań własnych i sprawdzić ich ortogonalność.
2. Obliczyć amplitudy drgań punktów zaczepienia mas, siły bezwładności oraz obwiednię momentów zginających wywołane zadaną siłą dynamiczną.
3. Sprawdzić maksymalne naprężenia normalne, uwzględniając dwa schematy obciążenia: a) obciążenie dynamiczne oraz b) obciążenie statyczne (ciężar mas skupionych).

W obliczeniach przyjąć: $E = 210 \text{ GPa}$, $f_y = 235 \text{ MPa}$.

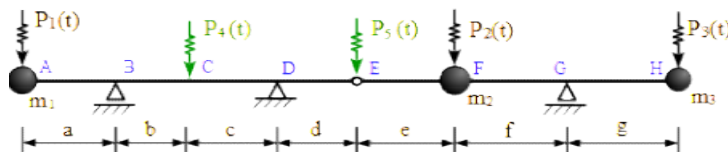
DANE DLA BELKI

Nr schematu: 4

m_1	m_2	m_3	a	b	c	d	e	f	g	h	przekrój
[kg]	[kg]	[kg]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	
700	400	450	2	2,1	1,2	2	1,4	2,5	1,4	0	I 120 HEA

Na belkę działa siła nr 3, zmienna w czasie zgodnie z zależnością: $P_3(t) = P \cos(pt)$

- amplituda siły wymuszającej: $P = 4,9 \text{ kN}$
- częstotliwość siły wymuszającej: $p = 19,4 \text{ Hz}$



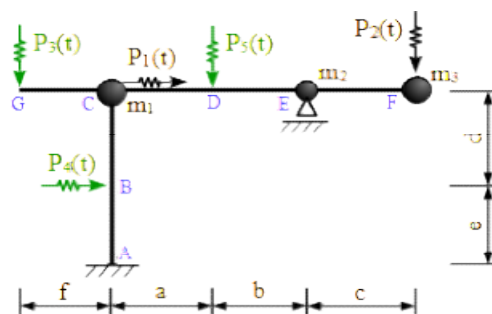
DANE DLA RAMY

Nr schematu: 5

m_1	m_2	m_3	a	b	c	d	e	f	przekrój
[kg]	[kg]	[kg]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	
500	650	950	2,6	1,9	3	3	2,7	3	I 300 HEA

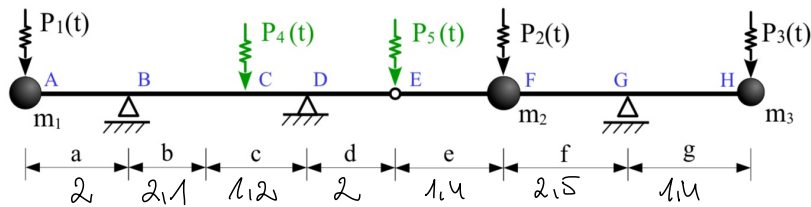
Na ramę działa siła nr 2, zmienna w czasie zgodnie z zależnością: $P_2(t) = P \sin(pt)$

- amplituda siły wymuszającej: $P = 2,4 \text{ kN}$
- częstotliwość siły wymuszającej: $p = 18,5 \text{ Hz}$



BELKA

Schemat 4.



Dane:

$$m_1 = 700 \text{ kg}$$

$$m_2 = 400 \text{ kg}$$

$$m_3 = 450 \text{ kg}$$

$$P_3(t) = 800 \sin(pt)$$

$$P = 4920 \text{ N}$$

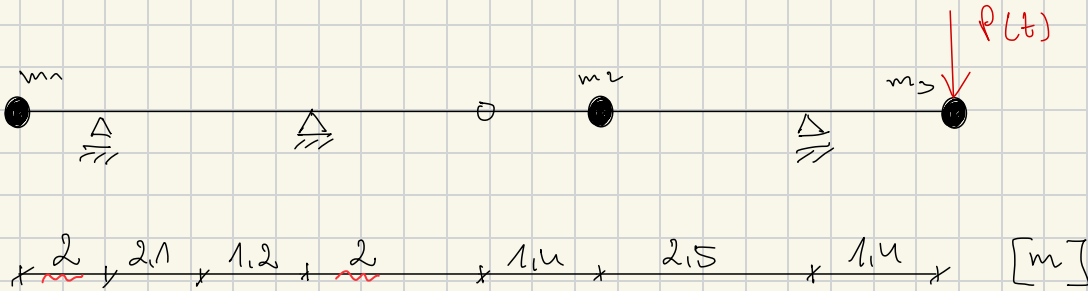
$$p = 19.4 \text{ Hz}$$

przekrój I 120 HEA

$$I = 606 \text{ cm}^4$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

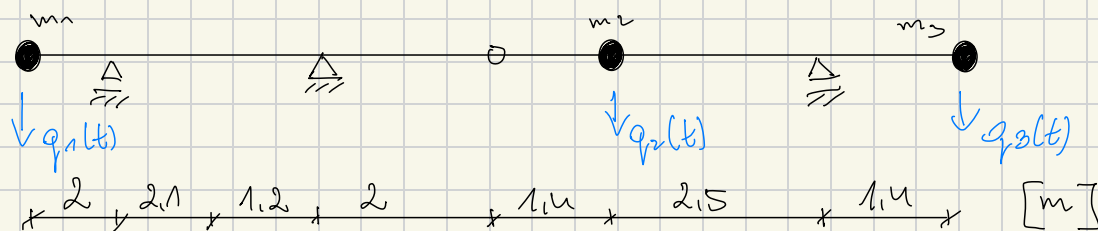
$$W_x = 106 \text{ cm}^3$$



uwaga! skala!

Skala powinna być zachowana na każdym rysunku!

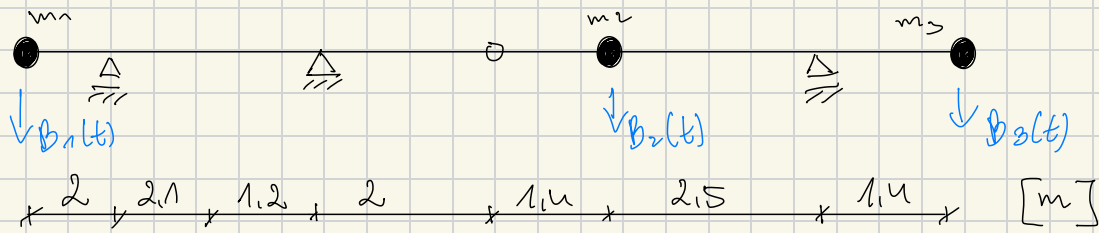
Stopień swobody dynamicznej układu



$$SSD = 3$$

Drzwienie swobodne (wziasne)

Sity drwizajace na ukied



Równania ruchu

$$\begin{cases} q_1(t) = \delta_{11} \cdot B_1(t) + \delta_{12} \cdot B_2(t) + \delta_{13} \cdot B_3(t) \\ q_2(t) = \delta_{21} \cdot B_1(t) + \delta_{22} \cdot B_2(t) + \delta_{23} \cdot B_3(t) \\ q_3(t) = \delta_{31} \cdot B_1(t) + \delta_{32} \cdot B_2(t) + \delta_{33} \cdot B_3(t) \end{cases}$$

$$q_i(t) = A_i \cdot \cos(\omega t)$$

$$B_i(t) = -m_i \cdot \ddot{q}_i(t)$$

$$\ddot{q}_i(t) = -A_i \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$B_1(t) = m_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$B_2(t) = m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$B_3(t) = m_3 \cdot A_3 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)$$

Masa porównawcza $M = 500 \text{ kg}$

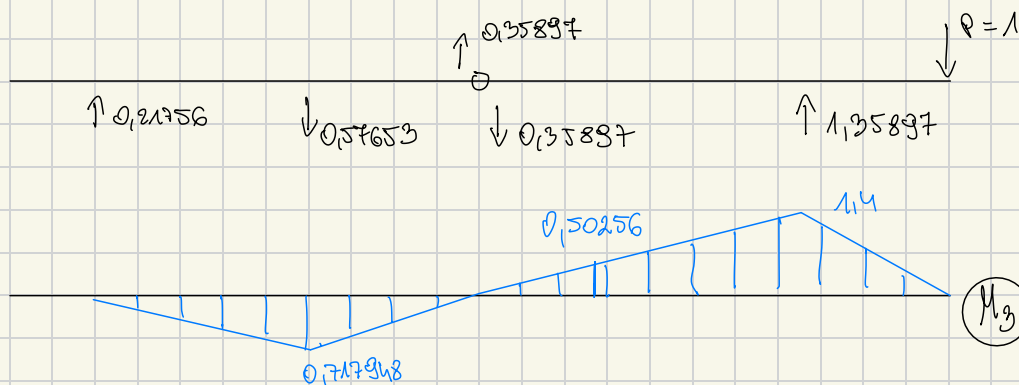
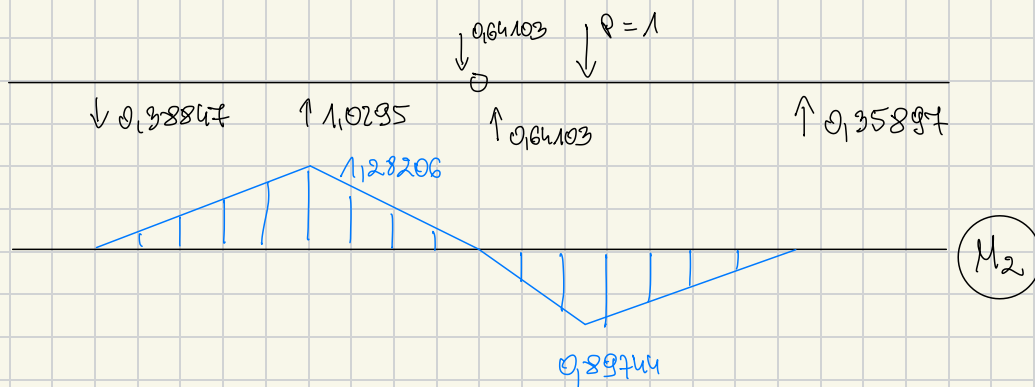
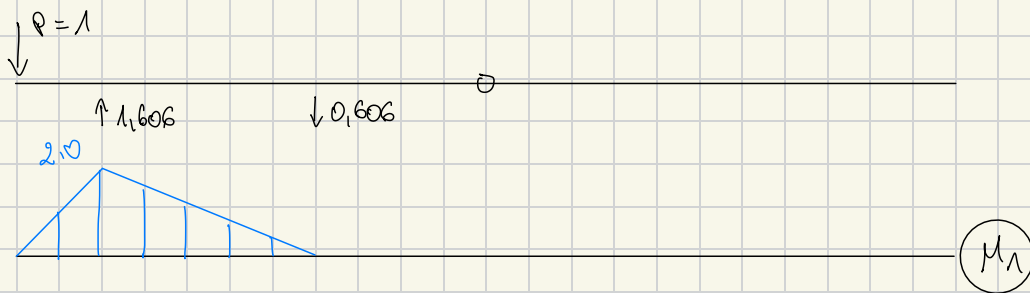
$$m_1 = 1.14M$$

$$m_2 = 0.18M$$

$$m_3 = 0.19M$$

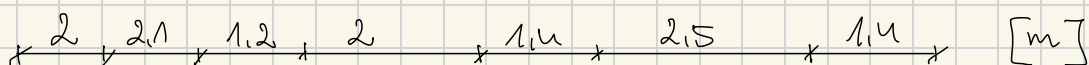
$$\begin{cases} A_1 = \delta_{11} \cdot 1.14M \cdot A_1 \cdot \omega^2 + \delta_{12} \cdot 0.18M \cdot A_2 \cdot \omega^2 + \delta_{13} \cdot 0.19M \cdot A_3 \cdot \omega^2 \\ A_2 = \delta_{21} \cdot 1.14M \cdot A_1 \cdot \omega^2 + \delta_{22} \cdot 0.18M \cdot A_2 \cdot \omega^2 + \delta_{23} \cdot 0.19M \cdot A_3 \cdot \omega^2 \\ A_3 = \delta_{31} \cdot 1.14M \cdot A_1 \cdot \omega^2 + \delta_{32} \cdot 0.18M \cdot A_2 \cdot \omega^2 + \delta_{33} \cdot 0.19M \cdot A_3 \cdot \omega^2 \end{cases}$$

Obliczenie współczynników δ_{ik} (RŁW)



$$\frac{1.4}{3.3} = \frac{x}{1.4}$$

$$x = \frac{1.4^2}{3.3} = 0.50256$$



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3.3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{7.0667}{EI} \approx \frac{7.067}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3.3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1.28206 \right] = \frac{1.410266}{EI} \approx \frac{1.410}{EI}$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3.3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 0.717948 \right) \right] = -\frac{0.7897428}{EI} \approx -\frac{0.7897}{EI}$$

$$\delta_{23} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 1.28206 \cdot 3.3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0.717948 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1.28206 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0.717948 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1.4 \cdot 0.89744 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0.50256 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2.5 \cdot 0.89744 \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot 0.50256 - \frac{1}{3} \cdot 1.4 \right) \right] = -\frac{2.735362}{EI} \approx -\frac{2.736}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3,3 \cdot 1,28206 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,28206 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,28206 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,28206 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 0,88744 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,88744 + \frac{1}{2} \cdot 0,88744 \cdot 2,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,88744 \right] = \\ = \frac{3,9508}{EI} \approx \frac{3,951}{EI}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3,3 \cdot 0,717948 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,717948 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,717948 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,717948 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 3,3 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 + \frac{1}{2} \cdot 1,4 \cdot 1,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,4 \right] = \frac{4,3733}{EI} \approx \frac{4,373}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32}$$

Do układow równań wprowadzamy skrót $\lambda = \frac{m\omega^2}{EI}$

$$\begin{cases} A_1 = 7,067 \cdot 1,4 \cdot A_1 \cdot \lambda + 0,8 \cdot 1,410 \cdot A_2 \cdot \lambda - 0,7894 \cdot 0,8 \cdot A_3 \cdot \lambda \\ A_2 = 1,4 \cdot 1,410 \cdot A_1 \cdot \lambda + 3,951 \cdot 0,8 \cdot A_2 \cdot \lambda - 2,736 \cdot 0,8 \cdot A_3 \cdot \lambda \\ A_3 = -0,7894 \cdot 1,4 \cdot A_1 \cdot \lambda - 2,736 \cdot 0,8 \cdot A_2 \cdot \lambda + 4,373 \cdot 0,8 \cdot A_3 \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 9,894 \cdot A_1 \cdot \lambda + 1,128 A_2 \cdot \lambda - 0,7107 A_3 \cdot \lambda \\ A_2 = 1,974 A_1 \cdot \lambda + 3,161 \cdot A_2 \cdot \lambda - 2,162 A_3 \cdot \lambda \\ A_3 = -1,106 A_1 \cdot \lambda - 2,189 A_2 \cdot \lambda + 3,936 A_3 \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1(1 - 9,894 \lambda) - A_2 \cdot 1,128 \cdot \lambda + A_3 \cdot 0,7107 \lambda = 0 \\ -1,974 A_1 \cdot \lambda + (1 - 3,161 \lambda) A_2 + 2,162 \lambda A_3 = 0 \\ 1,106 A_1 \cdot \lambda + 2,189 A_2 \lambda + (1 - 3,936 \lambda) A_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (1 - 9,894 \lambda) & -1,128 \lambda & 0,7107 \lambda \\ -1,974 \lambda & (1 - 3,161 \lambda) & 2,162 \lambda \\ 1,106 \lambda & 2,189 \lambda & (1 - 3,936 \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 0,08513$$

$$\lambda_2 = 0,18787$$

$$\lambda_3 = 0,86526$$

Obliczenie częstości drgań własnych

$$\lambda = \frac{M \omega^2}{EI} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda EI}{M}}$$

$$M = 500 \text{ kg}$$

$$EI = 606 \cdot 10^{-8} \cdot 210 \cdot 10^9 = 1272600 \text{ Nm}^2$$

$$\omega_1 = 15,56 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = 21,87 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega_3 = 46,93 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Sprawdzenie czy układ znajduje się w strefie rezonansowej

$$0,75 < \frac{p}{\omega} < 1,25$$

$$p = 19,4 \text{ Hz} = 19,4 \cdot 2\pi = 121,89 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{p}{\omega_1} = 7,834$$

$$\frac{p}{\omega_2} = 5,573$$

$$\frac{p}{\omega_3} = 2,597$$

Wniosek: Układ znajduje się poza strefą rezonansową.

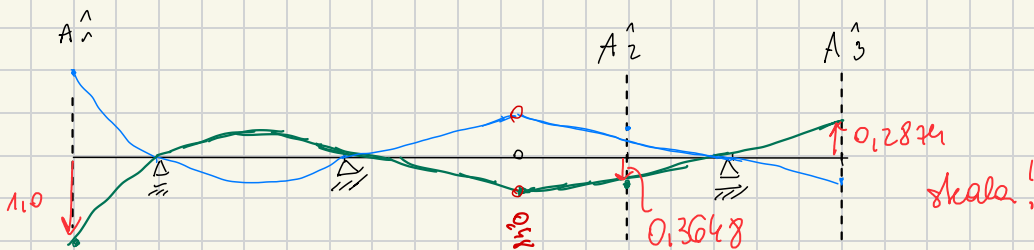
Postacie drgań własnych

I postać

$$\lambda = 0,08513 \quad A_1^1 = 1$$

$$\begin{cases} 0,05878 - 0,1073 A_2^1 + 0,06761 A_3^1 = 0 \\ -0,1878 + 0,6883 A_2^1 + 0,2322 A_3^1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2^1 = 0,3648 \\ A_3^1 = -0,2874 \end{cases}$$



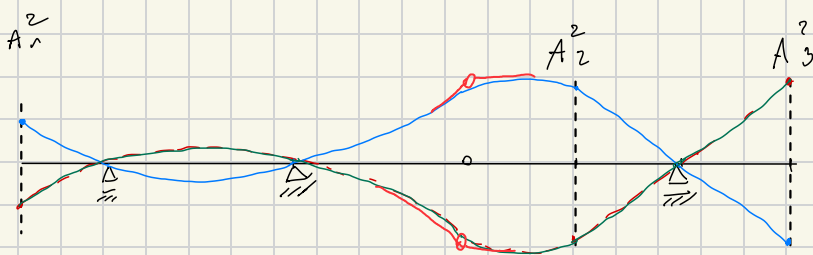
II postać

$$\lambda = 0,18787$$

$$A_1^2 = 1$$

$$\begin{cases} -0,8588 - 0,2119 A_2^2 + 0,1335 A_3^2 = 0 \\ -0,3409 + 0,4061 A_2^2 + 0,4625 A_3^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2^2 = -2,284 \\ A_3^2 = 2,808 \end{cases}$$



uwaga: przy myślowaniu post. dę własnych powinno być również zachowane skale - λ to również w odniesieniu do wyznaczeń belki, jak i przemieszczeń A_1, A_2 i A_3

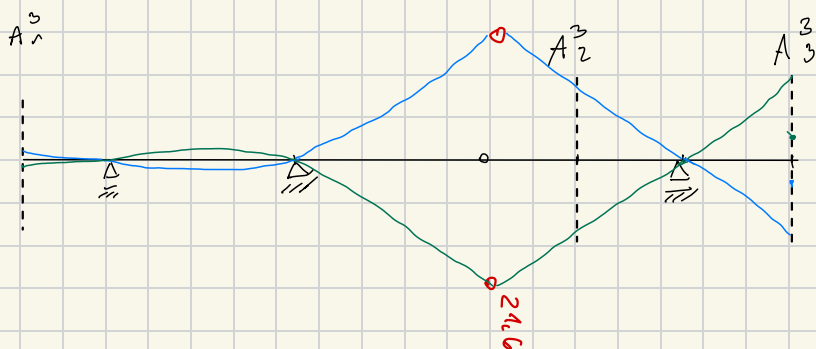
III postać

$$\lambda = 0,08655$$

$$A_1^3 = 1$$

$$\begin{cases} -7,561 - 0,8760 A_2^3 + 0,6149 A_3^3 = 0 \\ -1,708 - 1,735 A_2^3 + 2,130 A_3^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2^3 = -14,88 \\ A_3^3 = -11,32 \end{cases}$$



Warunek ortogonalności obiegów

$$\sum m_i A_i^j A_j^k = 0$$

$$A_1^1 = 1$$

$$A_2^1 = 1$$

$$A_3^1 = 1$$

$$m_1 = 700 \text{ kg}$$

$$A_1^2 = 0,3648$$

$$A_2^2 = -2,284$$

$$A_3^2 = -14,88$$

$$m_2 = 400 \text{ kg}$$

$$A_1^3 = -0,2874$$

$$A_2^3 = 2,808$$

$$A_3^3 = -11,32$$

$$m_3 = 450 \text{ kg}$$

I i II postać

$$700 + 400 \cdot 0,3648 \cdot (-2,284) + 450 \cdot (-0,2874) \cdot 2,808 = 3,156 \approx 0$$

I i III postać

$$700 + 400 \cdot 0,3648 \cdot (-14,88) + 450 \cdot (-0,2874) \cdot (-11,32) = -7,274 \approx 0$$

analiza czy 7,274 to w tym przypadku zero??

$$700 - 2171,3 + 1464,0 = -7,274$$

max składnik

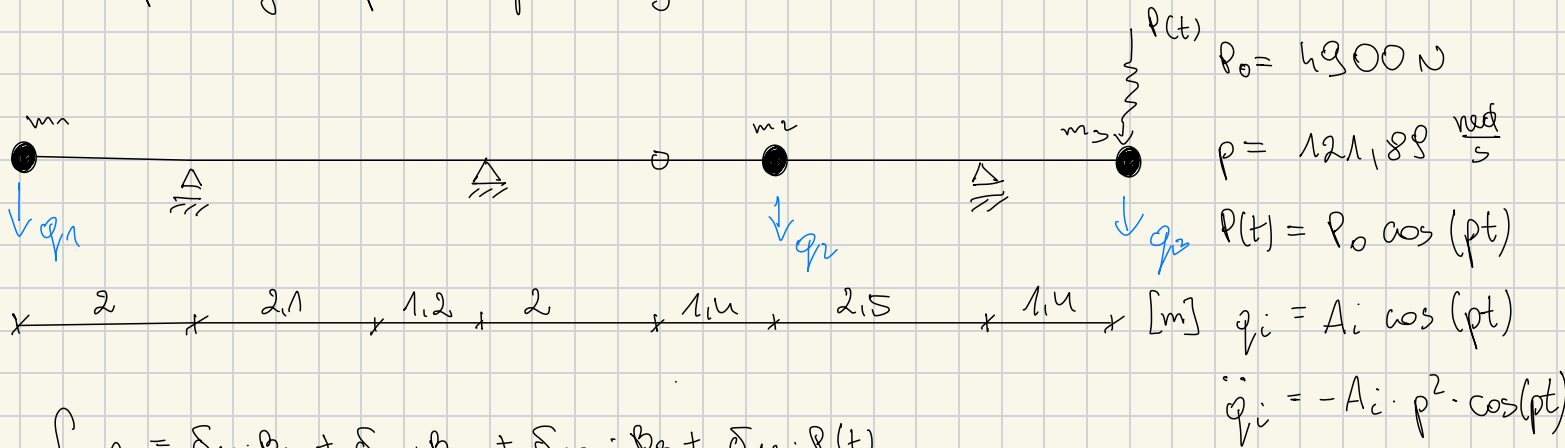
$$\frac{7,274}{2171,3} \cdot 100\% = 0,33\%$$

→ mniej niż 1% ⇒ OK

II i III postać

$$700 + 400 \cdot (-2,284) \cdot (-14,88) + 450 \cdot 2,808 \cdot (-11,32) = -9,584 \approx 0$$

Amplitudy drgań wymuszonych



$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11} \cdot B_1 + \delta_{12} \cdot B_2 + \delta_{13} \cdot B_3 + \delta_{13} \cdot P(t) \\ q_2 = \delta_{21} \cdot B_1 + \delta_{22} \cdot B_2 + \delta_{23} \cdot B_3 + \delta_{23} \cdot P(t) \\ q_3 = \delta_{31} \cdot B_1 + \delta_{32} \cdot B_2 + \delta_{33} \cdot B_3 + \delta_{33} \cdot P(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot \cos pt = \delta_{11} \cdot (m_1 \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{12} \cdot (m_2 \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{13} \cdot (m_3 \cdot A_3 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{13} \cdot P_0 \cos pt \\ A_1 \cdot \cos pt = \delta_{21} \cdot (m_1 \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{22} \cdot (m_2 \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{23} \cdot (m_3 \cdot A_3 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{23} \cdot P_0 \cos pt \\ A_3 \cdot \cos pt = \delta_{31} \cdot (m_1 \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{32} \cdot (m_2 \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{33} \cdot (m_3 \cdot A_3 \cdot p^2 \cdot \cos pt) + \delta_{33} \cdot P_0 \cos pt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = \delta_{11} \cdot (1,44 \text{ M} \cdot A_1 \cdot p^2) + \delta_{12} \cdot (0,8 \text{ M} \cdot A_2 \cdot p^2) + \delta_{13} \cdot (0,9 \text{ M} \cdot A_3 \cdot p^2) + \delta_{13} \cdot P_0 \\ A_2 = \delta_{21} \cdot (1,44 \text{ M} \cdot A_1 \cdot p^2) + \delta_{22} \cdot (0,8 \text{ M} \cdot A_2 \cdot p^2) + \delta_{23} \cdot (0,9 \text{ M} \cdot A_3 \cdot p^2) + \delta_{23} \cdot P_0 \\ A_3 = \delta_{31} \cdot (1,44 \text{ M} \cdot A_1 \cdot p^2) + \delta_{32} \cdot (0,8 \text{ M} \cdot A_2 \cdot p^2) + \delta_{33} \cdot (0,9 \text{ M} \cdot A_3 \cdot p^2) + \delta_{33} \cdot P_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot (1 - \delta_{11} \cdot 1,44 \text{ M} \cdot p^2) - A_2 \cdot \delta_{12} \cdot 0,8 \text{ M} \cdot p^2 - A_3 \cdot \delta_{13} \cdot 0,9 \text{ M} \cdot p^2 = \delta_{13} \cdot P_0 \\ -A_1 \cdot \delta_{21} \cdot 1,44 \text{ M} \cdot p^2 + A_2 \cdot (1 - \delta_{22} \cdot 0,8 \text{ M} \cdot p^2) - A_3 \cdot \delta_{23} \cdot 0,9 \text{ M} \cdot p^2 = \delta_{23} \cdot P_0 \\ -A_1 \cdot \delta_{31} \cdot 1,44 \text{ M} \cdot p^2 - A_2 \cdot \delta_{32} \cdot 0,8 \text{ M} \cdot p^2 + A_3 \cdot (1 - \delta_{33} \cdot 0,9 \text{ M} \cdot p^2) = \delta_{33} \cdot P_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot (1 - \frac{7,1087}{EI} \cdot 400 \cdot 121,89^2) - A_2 \cdot \frac{1,440}{EI} \cdot 400 \cdot 121,89^2 - A_3 \cdot (-\frac{0,7887}{EI}) \cdot 450 \cdot 121,89^2 = (-\frac{0,7887}{EI}) \cdot 4900 \\ -A_1 \cdot \frac{1,440}{EI} \cdot 700 \cdot 121,89^2 + A_2 \cdot (1 - \frac{3,551}{EI} \cdot 400 \cdot 121,89^2) - A_3 \cdot (-\frac{2,736}{EI}) \cdot 450 \cdot 121,89^2 = (-\frac{2,736}{EI}) \cdot 4900 \\ -A_1 \cdot (-\frac{0,7887}{EI}) \cdot 700 \cdot 121,89^2 - A_2 \cdot (-\frac{2,736}{EI}) \cdot 400 \cdot 121,89^2 + A_3 \cdot (1 - \frac{4,1373}{EI} \cdot 450 \cdot 121,89^2) = \frac{4,1373}{EI} \cdot 4900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -56,75 A_1 - 6,585 A_2 + 4,149 A_3 = -0,003041 \\ -11,52 A_1 - 17,45 A_2 + 14,97 A_3 = -0,01053 \\ 6,454 A_1 + 12,78 A_2 - 21,87 A_3 = 0,01684 \end{cases} \quad \begin{matrix} \checkmark \\ \\ \checkmark \end{matrix}$$

$\ddot{x} = 1272600$

$$\begin{cases} A_1 = 0,00001584 \text{ [m]} \\ A_2 = -0,00005458 \text{ [m]} \\ A_3 = -0,0007878 \text{ [m]} \end{cases} \quad \checkmark$$

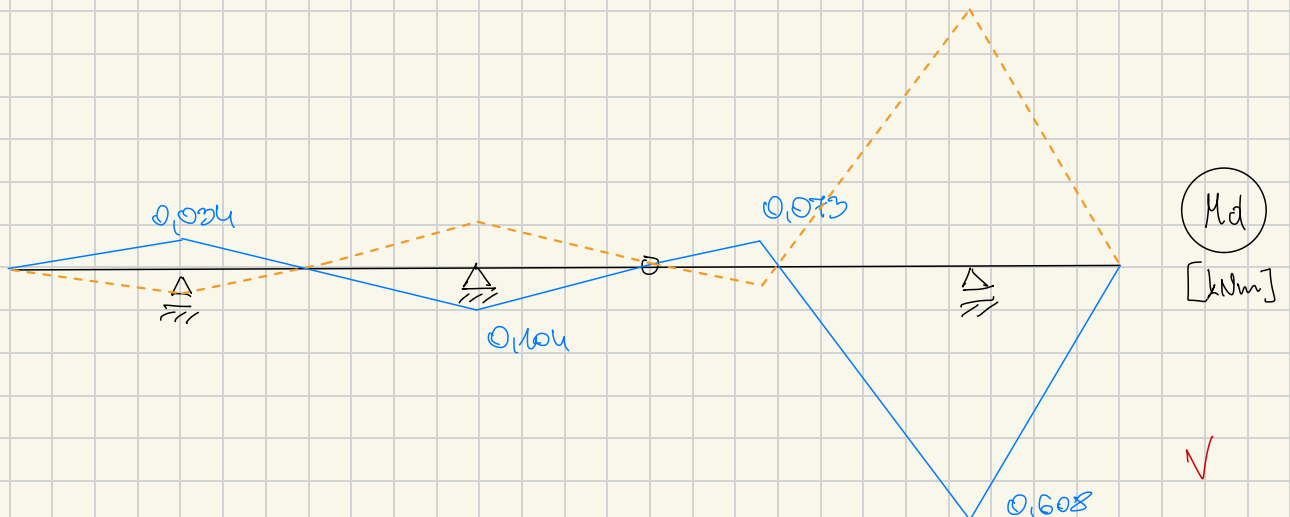
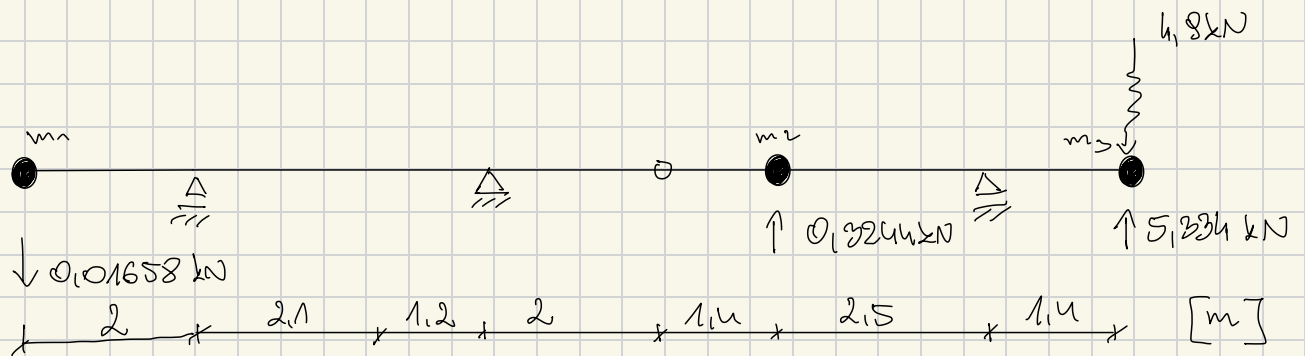
Oblinewie amplitud sit bezwiednosci :

$$Q_i(t) = -m_i \cdot \ddot{q}_i = -m_i \cdot (-A_i \cdot p^2 \cdot \cos pt) \quad \text{[sity symmetriowe dla } \cos pt = 1]$$

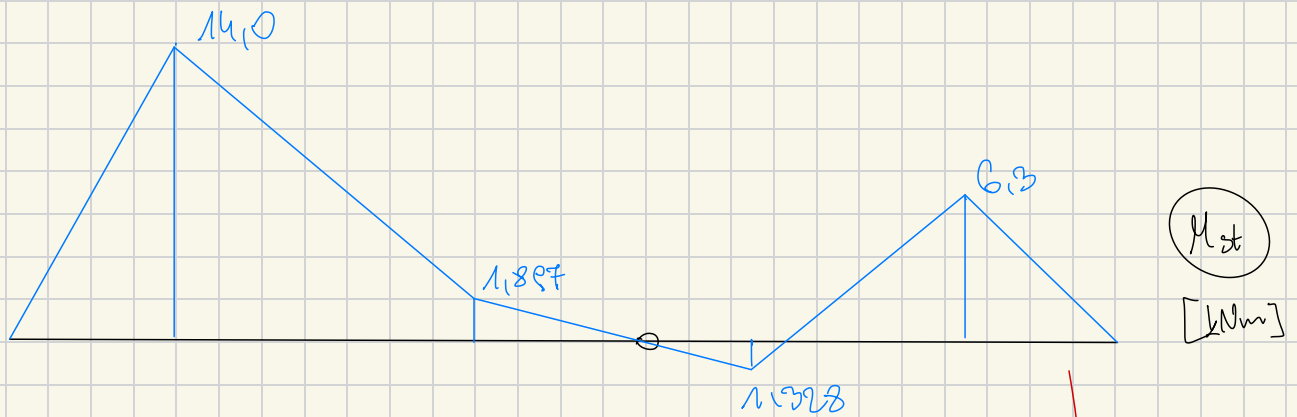
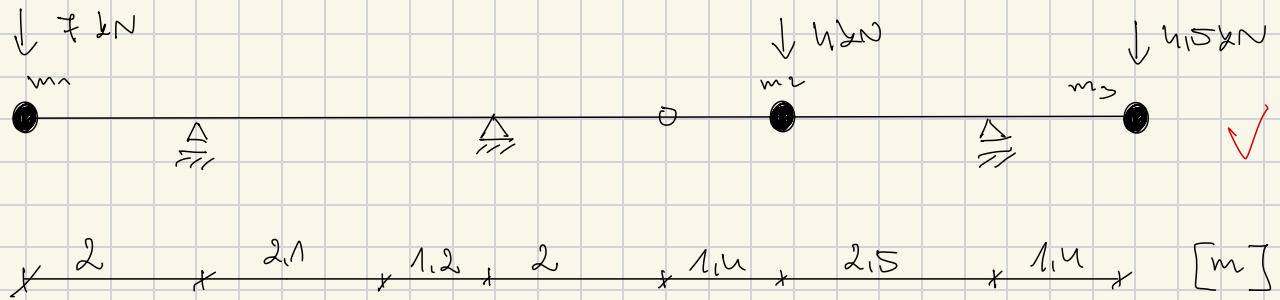
$$B_1 = m_1 \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot 1 = 700 \cdot (0,00001584) \cdot 121,89^2 = 16,578 \text{ N} = 0,01658 \text{ kN}$$

$$B_2 = m_2 \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot 1 = 400 \cdot (-0,00005458) \cdot 121,89^2 = -324,42 \text{ N} = -0,3244 \text{ kN}$$

$$B_3 = m_3 \cdot A_3 \cdot p^2 \cdot 1 = 450 \cdot (-0,0007878) \cdot 121,89^2 = -5334 \text{ N} = -5,334 \text{ kN} \quad \checkmark$$



Moment statyczny



Sprawdzenie naprężeń normalnych w przekroju

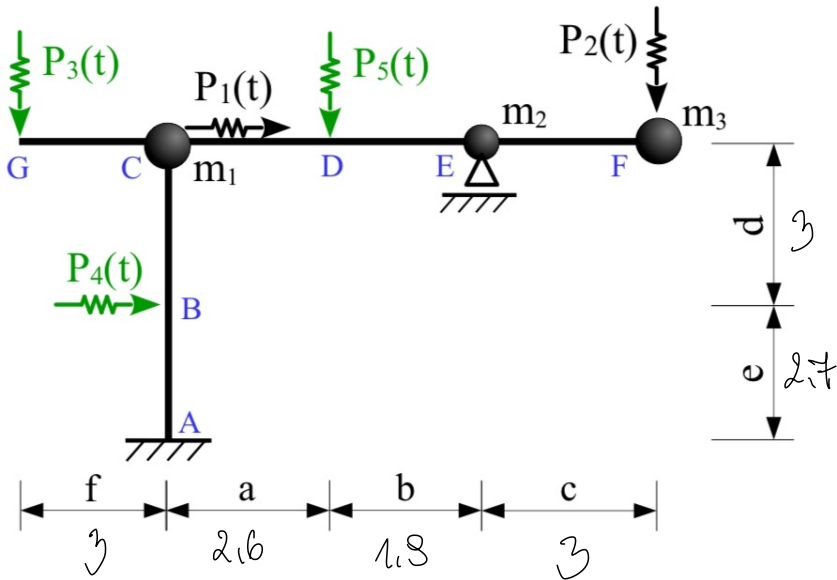
$$M_{max} = 1.2 \cdot M_{st} + 5 \cdot M_d = 1.2 \cdot 14.0 + 5 \cdot 0.024 = 16.87 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{max}}{W} = \frac{16.87}{106} = 16.01 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 160.1 \text{ MPa} < 235 \text{ MPa} \quad \checkmark$$

Naprężenia w przekroju nie przekraczają naprężeń dopuszczalnych, możemy więc uznać przekrój za dobrze zaprojektowany.

RAMA

Schemat 5.



Dane:

$$m_1 = 500 \text{ kg}$$

$$m_2 = 650 \text{ kg}$$

$$m_3 = 850 \text{ kg}$$

$$P_2(t) = 8 \sin(pt)$$

$$P = 2.4 \text{ kN}$$

$$p = 18.5 \text{ Hz}$$

przekrój I 300 HEA

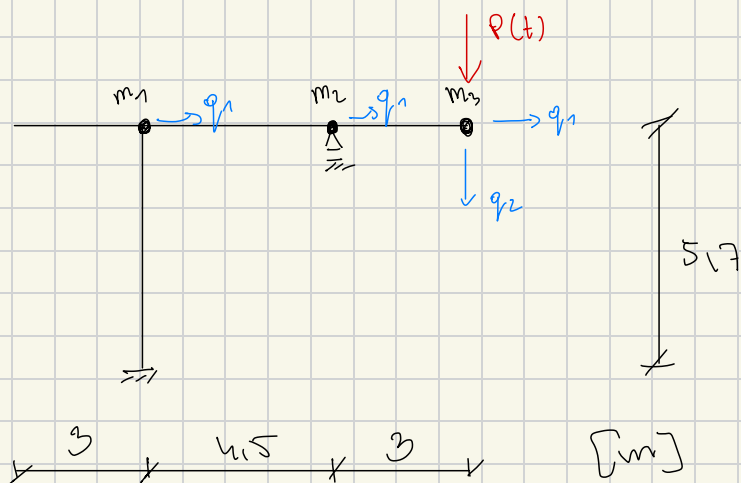
$$I = 18263 \text{ cm}^4$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

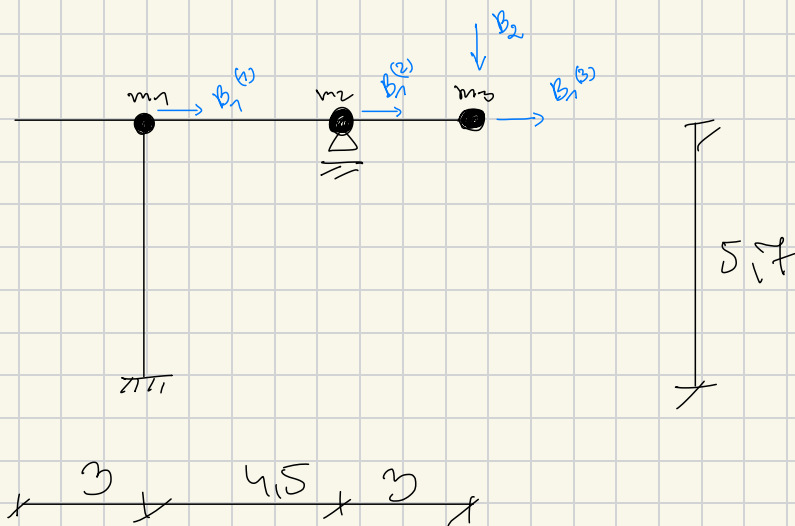
$$W_x = 1260 \text{ cm}^3$$

Stopień swobody dynamicznej układu

$$\text{SbD} = 2$$



Ogólnie swobodne - sity drgające na wstęgu



$$B_1^{(1)} = -m_1 \cdot \ddot{q}_1$$

$$B_1^{(2)} = -m_2 \cdot \ddot{q}_1$$

$$B_1^{(3)} = -m_3 \cdot \ddot{q}_1$$

$$B_2 = -m_3 \cdot \ddot{q}_2$$

$$B_1 = B_1^{(1)} + B_1^{(2)} + B_1^{(3)}$$

$$B_1 = -(m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{q}_1$$

Równanie ruchu

$$\begin{cases} q_1 = q_1 \cdot B_1^{(1)} + q_1 \cdot B_1^{(2)} + q_1 \cdot B_1^{(3)} + q_1 B_2 \\ q_2 = q_2 \cdot B_1^{(1)} + q_2 \cdot B_1^{(2)} + q_2 \cdot B_1^{(3)} + q_2 B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11} B_1 + \delta_{12} B_2 \\ q_2 = \delta_{21} B_1 + \delta_{22} B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \delta_{11} \cdot B_1^{(1)} + \delta_{11} \cdot B_1^{(2)} + \delta_{11} \cdot B_1^{(3)} + \delta_{12} \cdot B_2 \\ q_2 = \delta_{21} \cdot B_1^{(1)} + \delta_{21} \cdot B_1^{(2)} + \delta_{21} \cdot B_1^{(3)} + \delta_{22} \cdot B_2 \end{cases}$$

$$q_1 + \delta_{11} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{q}_1 + \delta_{12} \cdot m_3 \cdot \ddot{q}_2 = 0$$

$$q_2 + \delta_{21} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{q}_1 + \delta_{22} \cdot m_3 \cdot \ddot{q}_2 = 0$$

$$\begin{cases} q_1 = A_1 \cdot \sin \omega t \\ q_2 = A_2 \cdot \sin \omega t \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{q}_1 = -A_1 \omega^2 \sin \omega t \\ \ddot{q}_2 = -A_2 \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot \sin \omega t - \delta_{11} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot A_1 \cdot \omega^2 \sin \omega t - \delta_{12} \cdot m_3 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \sin \omega t = 0 \\ A_2 \cdot \sin \omega t - \delta_{21} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot A_1 \cdot \omega^2 \sin \omega t - \delta_{22} \cdot m_3 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \sin \omega t = 0 \end{cases}$$

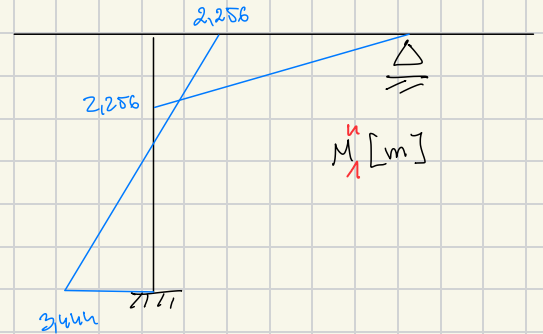
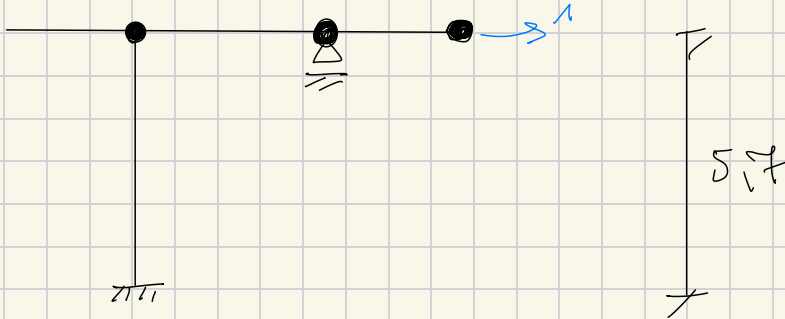
$$\begin{cases} A_1 (1 - \delta_{11} (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \omega^2) - A_2 \cdot \delta_{12} \cdot m_3 \cdot \omega^2 = 0 \\ -A_1 \cdot \delta_{21} (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \omega^2 + A_2 (1 - \delta_{22} \cdot m_3 \cdot \omega^2) = 0 \end{cases}$$

Obliczenie współczynników podatności

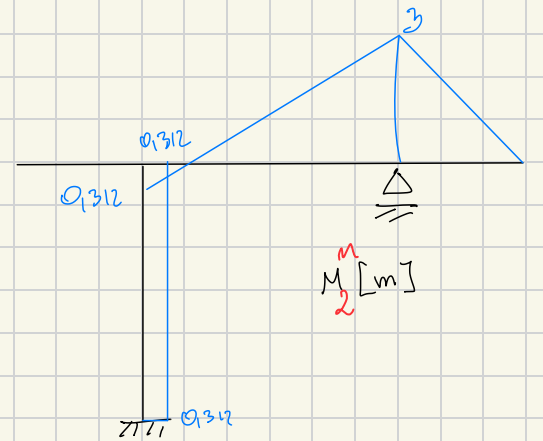
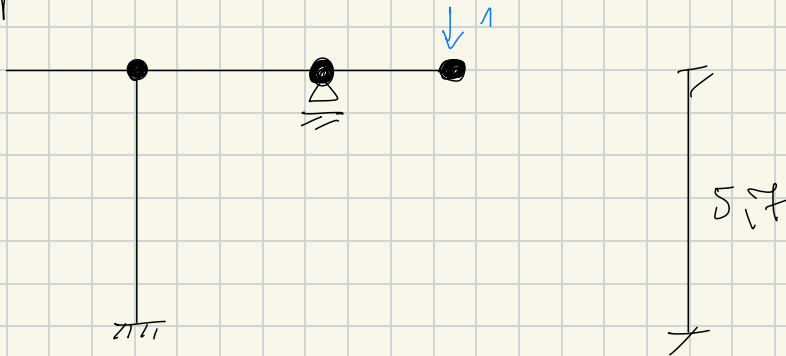
$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_k}{EI} dx$$

uwaga! Jeśli układ jest statycznie niewyznaczalny - proszę założyć podporządkowanie (można być lub może nie być.)

$$q_1 = 1$$



$$q_2 = 1$$



$$3 \quad 4.5 \quad 3$$

uwaga - w obliczeniach δ_{ik} (do dynamiki) warto zastosować twierdzenie redukcyjne

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4.5 \cdot 2.256 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2.256 + \frac{1}{2} \cdot 2.256 \cdot 5.7 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2.256 - \frac{1}{3} \cdot 3.444 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5.7 \cdot 3.444 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3.444 - \frac{1}{3} \cdot 2.256 \right) \right]$$

$$\delta_{11} = \frac{25.08}{EI} \quad \checkmark$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2.256 \cdot 4.5 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 0.312 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2.256 \cdot 5.7 \cdot (-0.312) + \frac{1}{2} \cdot 3.444 \cdot 5.7 \cdot (-0.312) \right]$$

$$\delta_{12} = -\frac{5.1077}{EI} \quad \checkmark$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4,5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 0,312 \right) + \frac{1}{2} \cdot 0,312 \cdot 4,5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,312 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + 0,312 \cdot 8,7 \cdot 0,312 \right]$$

$$\delta_{22} = \frac{21,80}{EI} \quad \checkmark$$

Przyjeto masę porównawczą

$$M = 50 \text{ kg}$$

$$m_1 = 10M$$

$$m_2 = 13M$$

$$m_3 = 19M$$

$$\begin{cases} A_1 (1 - \delta_{11} \cdot 42M \cdot \omega^2) - A_2 \cdot \delta_{12} \cdot 19M \cdot \omega^2 = 0 \\ -A_1 \cdot \delta_{21} \cdot 42M \cdot \omega^2 + A_2 (1 - \delta_{22} \cdot 19M \cdot \omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \left(1 - 25,08 \cdot \frac{42M}{EI} \cdot \omega^2 \right) - A_2 \cdot (-5,04) \cdot \frac{19M}{EI} \cdot \omega^2 = 0 \\ -A_1 \cdot (-5,04) \cdot \frac{42M}{EI} \cdot \omega^2 + A_2 \left(1 - 21,8 \cdot \frac{19M}{EI} \cdot \omega^2 \right) = 0 \end{cases}$$

Podstawiamy $\lambda = \frac{M}{EI} \cdot \omega^2$

$$\begin{cases} A_1 (1 - 25,08 \cdot 42 \cdot \lambda) - A_2 \cdot (-5,04) \cdot 19 \cdot \lambda = 0 \\ -A_1 \cdot (-5,04) \cdot 42 \cdot \lambda + A_2 (1 - 21,8 \cdot 19 \cdot \lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 (1 - 1053,36 \cdot \lambda) - A_2 \cdot (-96,43) \cdot \lambda = 0 \\ -A_1 \cdot (-213,234) \cdot \lambda + A_2 (1 - 414,2 \cdot \lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 (1 - 1053,36 \cdot \lambda) + 96,43 \cdot A_2 \cdot \lambda = 0 \\ 213,234 A_1 \lambda + A_2 (1 - 414,2 \cdot \lambda) = 0 \end{cases}$$

Otrzymano układ równań jednorodnych, który ma rozwiązanie, jeżeli:

$$\begin{vmatrix} (1 - 1053,36 \lambda) & 86,463 \lambda \\ 213,234 \lambda & (1 - 414,2 \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - 1053,36 \lambda) \cdot (1 - 414,2 \lambda) - (213,234 \lambda) \cdot (86,463 \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0,000822453 \quad \checkmark$$

$$\lambda_2 = 0,00260761 \quad \checkmark$$

Obliczenie częstości drgań własnych

$$\lambda = \frac{m \omega^2}{EI} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda EI}{m}}$$

$$I = 18263 \text{ cm}^4$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$M = 50 \text{ kg} \quad (\text{masa porolniewoczu})$$

$$EI = 18263 \cdot 10^{-8} \cdot 210 \cdot 10^9 = 38352300 \text{ Nm}^2$$

$$\omega_1 = 26,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \checkmark$$

$$\omega_2 = 44,723 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \checkmark$$

Sprawdzenie czy układ znajduje się w strefie rezonansowej

$$0,75 < \frac{p}{\omega} < 1,25$$

$$p = 18,5 \text{ Hz} = 18,5 \cdot 2\pi = 116,239 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{p}{\omega_1} = 4,3689$$

$$\frac{p}{\omega_2} = 2,5991$$

Wniosek: Układ znajduje się poza strefą rezonansową

$\checkmark$

Podane danei własny

$$\omega_1 \Leftrightarrow \lambda_1$$

$$A_1 = 1$$

$$A_1 (1 - 1053,36 \cdot \lambda_1) + 86,463 \cdot A_2 \cdot \lambda_1 = 0$$

$$(1 - 1053,36 \cdot 0,000822453) + 86,463 \cdot 0,000822453 \cdot A_2 = 0$$

$$A_2 = -0,31832 \quad \checkmark$$

Drugie równanie

$$213,234 A_1 \lambda_1 + A_2 (1 - 414,2 \lambda_1) = 0$$

$$213,234 \cdot 0,000822453 + (1 - 414,2 \cdot 0,000822453) A_2 = 0$$

$$A_2 = -0,31832$$

$$\omega_2 \Leftrightarrow \lambda_2$$

$$A_1 = 1$$

$$A_1 (1 - 1053,36 \cdot \lambda_2) + 86,463 \cdot A_2 \cdot \lambda_2 = 0$$

$$(1 - 1053,36 \cdot 0,00260761) + 86,463 \cdot 0,00260761 \cdot A_2 = 0$$

$$A_2 = 6,8443 \quad \checkmark$$

Drugie równanie

$$213,234 A_1 \lambda_2 + A_2 (1 - 414,2 \lambda_2) = 0$$

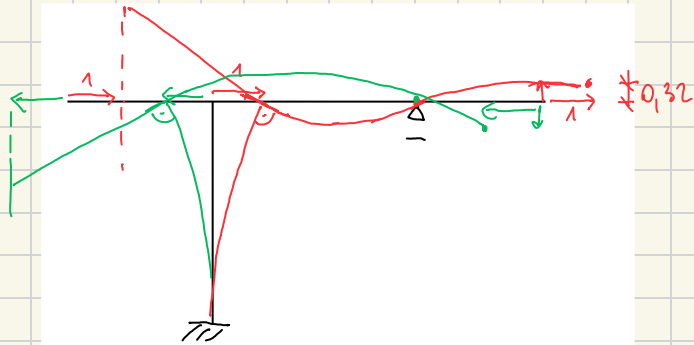
$$213,234 \cdot 0,00260761 + (1 - 414,2 \cdot 0,00260761) A_2 = 0$$

$$A_2 = 6,8441$$

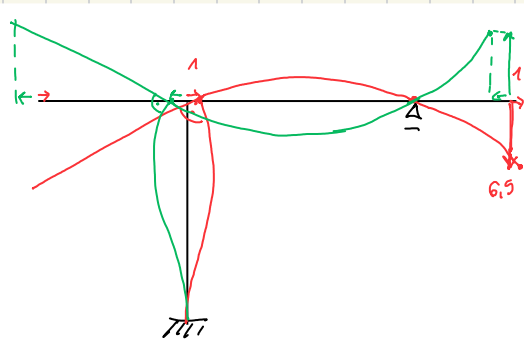
Sprawdzenie ortogonalności

$$A_1^1 \cdot A_1^2 \cdot 42M + A_2^1 \cdot A_2^2 \cdot 18M = 0$$

$$1 \cdot 1 \cdot 2100 + (-0,31832) \cdot 6,8441 \cdot 850 = 0,07638 \approx 0$$

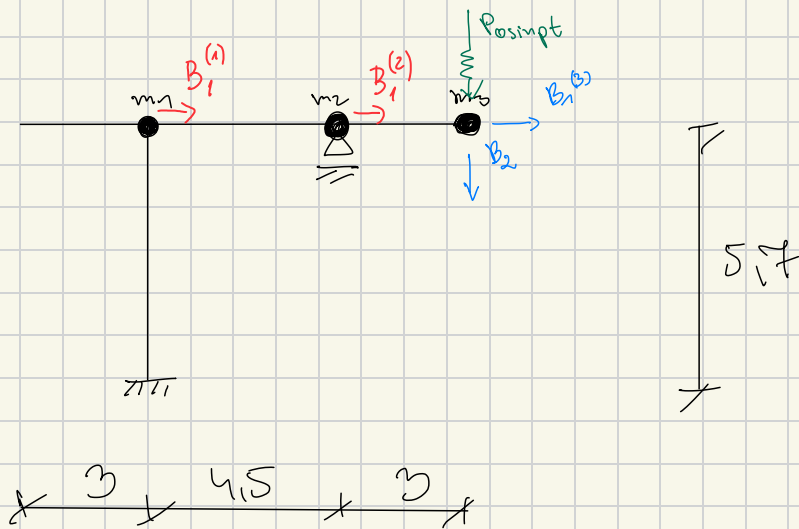


I postaci drgani wtusnych



II postaci drgani wtusnych

Amplitudy drgani wymuszonych



$$P = 2400 \text{ N}$$

$$EI = 38352300 \text{ Nm}^2$$

$$\rho = 116,239 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \delta_{11} \cdot B_1 + \delta_{12} \cdot B_2 + \delta_{12} \cdot P(t) \\ \varphi_2 = \delta_{21} \cdot B_1 + \delta_{22} \cdot B_2 + \delta_{22} \cdot P(t) \end{cases}$$

$$B_1 = B_1^{(1)} + B_1^{(2)} + B_1^{(3)}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 + \delta_{11} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{\varphi}_1 + \delta_{12} \cdot m_3 \cdot \ddot{\varphi}_2 = \delta_{12} P(t) \\ \varphi_2 + \delta_{21} \cdot (m_1 + m_2 + m_3) \cdot \ddot{\varphi}_1 + \delta_{22} \cdot m_3 \cdot \ddot{\varphi}_2 = \delta_{22} P(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \cdot \sin \rho t \\ \varphi_2 = A_2 \cdot \sin \rho t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = -A_1 \cdot \rho^2 \cdot \sin \rho t \\ \ddot{\varphi}_2 = -A_2 \cdot \rho^2 \cdot \sin \rho t \end{cases}$$

Masa porównoważna

$$M = 50 \text{ kg}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3) = 12M$$

$$m_3 = 19M$$

$$\begin{cases} A_1 \cdot \sin pt - \delta_{11} \cdot k_{2M} \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot \sin pt - \delta_{12} \cdot 19M \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \sin pt = \delta_{12} \cdot P_0 \cdot \sin pt \\ A_2 \cdot \sin pt - \delta_{21} \cdot k_{2M} \cdot A_1 \cdot p^2 \cdot \sin pt - \delta_{22} \cdot 19M \cdot A_2 \cdot p^2 \cdot \sin pt = \delta_{22} \cdot P_0 \cdot \sin pt \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 (1 - \delta_{11} \cdot k_{2M} \cdot p^2) - A_2 \cdot \delta_{12} \cdot 19M \cdot p^2 = \delta_{12} \cdot P_0 \\ -A_1 \cdot \delta_{21} \cdot k_{2M} \cdot p^2 + A_2 (1 - \delta_{22} \cdot 19M \cdot p^2) = \delta_{22} \cdot P_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{25.08}{EI} \\ \delta_{12} &= -\frac{5.077}{EI} \\ \delta_{22} &= \frac{21.80}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 (1 - 25.08 \cdot k_{2M} \cdot \frac{M}{EI} \cdot p^2) - A_2 \cdot (-5.077) \cdot 19 \cdot \frac{M}{EI} \cdot p^2 = -\frac{5.077}{EI} \cdot P_0 \\ -A_1 \cdot (-5.077) \cdot k_{2M} \cdot \frac{M}{EI} \cdot p^2 + A_2 (1 - 21.8 \cdot 19 \cdot \frac{M}{EI} \cdot p^2) = \frac{21.8}{EI} \cdot P_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 (1 - 25.08 \cdot k_{2M} \cdot \frac{50}{38352300} \cdot (116.238)^2) - A_2 \cdot (-5.077) \cdot 19 \cdot \frac{50}{38352300} \cdot (116.238)^2 = -\frac{5.077}{38352300} \cdot 2400 \\ -A_1 \cdot (-5.077) \cdot k_{2M} \cdot \frac{50}{38352300} \cdot (116.238)^2 + A_2 (1 - 21.8 \cdot 19 \cdot \frac{50}{38352300} \cdot (116.238)^2) = \frac{21.8}{38352300} \cdot 2400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -17.55492 A_1 + 1.688184 A_2 = -0.00031740415 \\ 37561141 A_1 - 6.2861275 A_2 = 0.001364195 \end{cases} \quad | \cdot 3.70536$$

$$\begin{cases} -65.047298 A_1 + 6.2861255 A_2 = -0.001774219365 \\ 37561141 A_1 - 6.2861275 A_2 = 0.001364195 \end{cases}$$

$$-61.2911839 A_1 = 0.000186875635$$

$$A_1 = -0.000003051 \text{ [m]}$$

$$A_2 = -0.000218492 \text{ [m]}$$

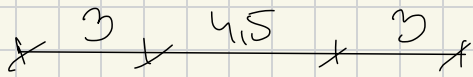
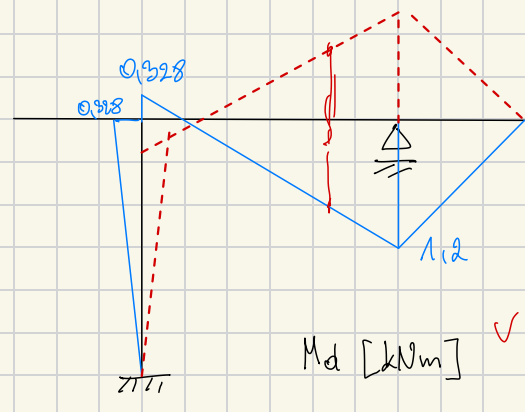
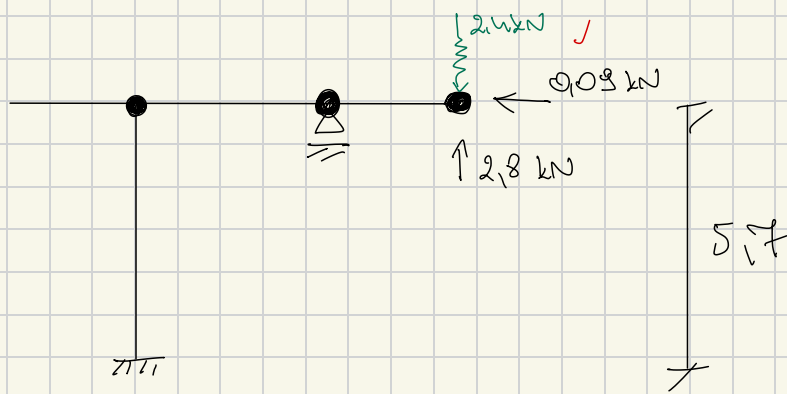
Oblivenie amplitudy sily berednashch

$$B_i = -m_i \cdot \ddot{q}_i = m_i \cdot p^2 \cdot A_i \cdot \sin pt$$

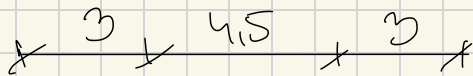
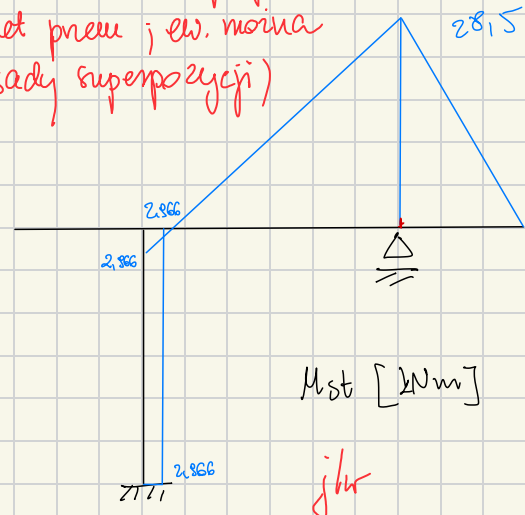
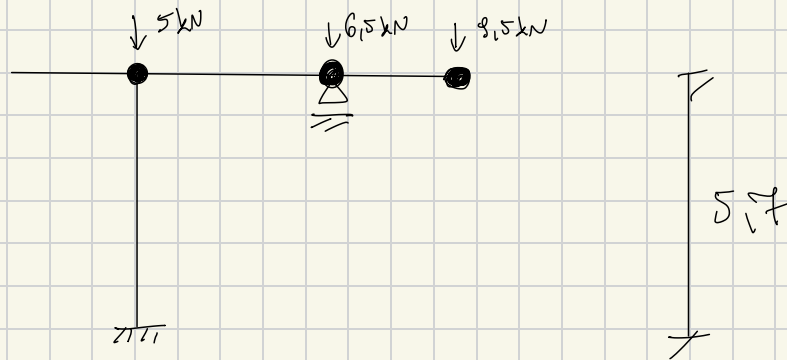
Sily dynamichesk dlya $\sin pt = 1$

$$B_1 = 2100 \cdot 116.238^2 \cdot (-0.00000305061223) = -86.55856 \text{ N} = -0.08656 \text{ kN}$$

$$B_2 = 950 \cdot 116.238^2 \cdot (-0.0002184919933) = -2804.5478 \text{ N} = -2.8045 \text{ kN}$$



Obciążenie siłami statycznymi:



uwaga!
Obliczenie proszę zawrzeć w projekcie
(moż. sił lub momentów pnieu; ew. można
skorzystać z zasady superpozycji)

Sprowadzenie naprężeń normalnych w przekroju

$$M_{\max} = 1.2 M_{st} + 5 \cdot M_d = 1.2 \cdot 28.15 + 5 \cdot 1.2 = 40.2 \text{ kNm}$$

$$\sigma = \frac{4020}{1260} = 3.19 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 31.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{dop}} = 235 \text{ MPa}$$

$$\sigma < \sigma_{\text{dop}}$$

uwaga! Po wprowadzeniu wartości sił normalnych (dyn. i stat.) należy obliczyć naprężenie jako:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{A}$$

otrzymaliśmy

$$\sigma = 32.02 \text{ MPa}$$

Naprężenia w przekroju nie przekraczają naprężeń dopuszczalnych, możemy więc uznać przekrój za dobrze zaprojektowany.