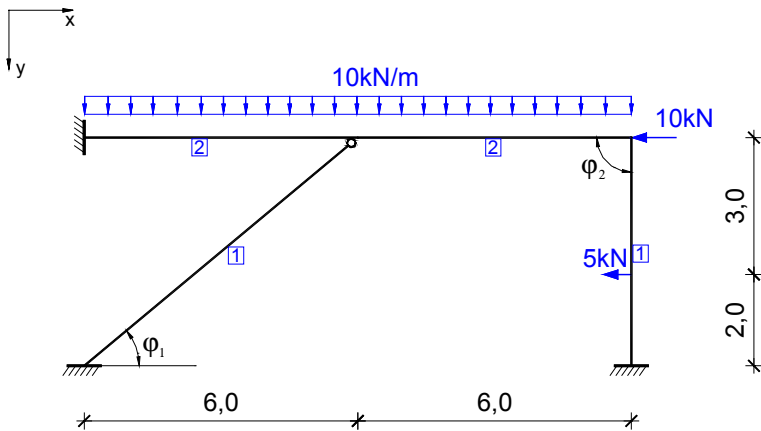


Wyznaczyć rozkład sił wewnętrznych N, M, T korzystając z komputerowej wersji metody przemieszczeń.

- schemat konstrukcji

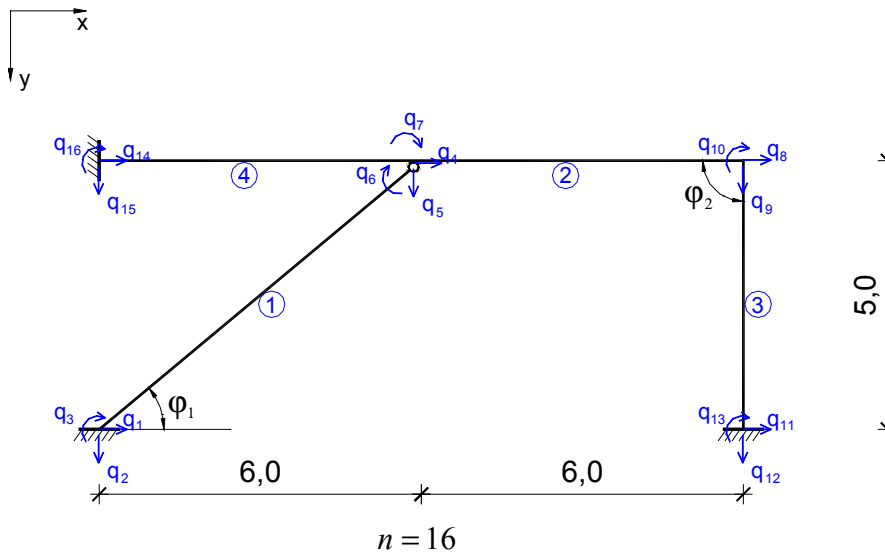


E=205 GPa

1) I 220: $I = 3060 \text{ cm}^4$
 $A = 39,6 \text{ cm}^2$
 $EI_1 = 6273 \text{ kNm}^2$
 $EA_1 = 811800 \text{ kN}$

2) I 260: $I = 5740 \text{ cm}^4$
 $A = 53,4 \text{ cm}^2$
 $EI_1 = 11767 \text{ kNm}^2$
 $EA_1 = 1094700 \text{ kN}$

- przemieszczenia w układzie globalnym



$$\underline{K} = [16 \times 16]$$

$$\underline{q} = [16 \times 1]$$

- macierz transformacji (pręt 1)

$$\alpha = -\varphi_1 = -39,80557109^\circ$$

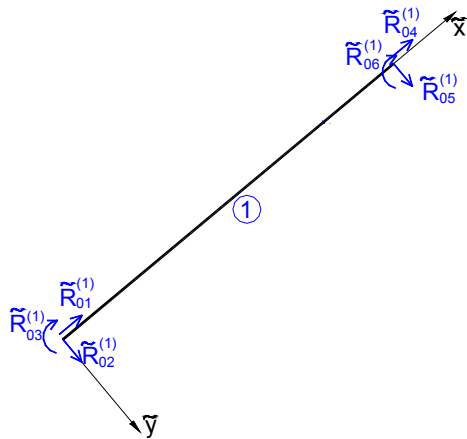
$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,76822 & -0,64018 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,64018 & 0,76822 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,76822 & -0,64018 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,64018 & 0,76822 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- macierz transformacji (pręt 3)

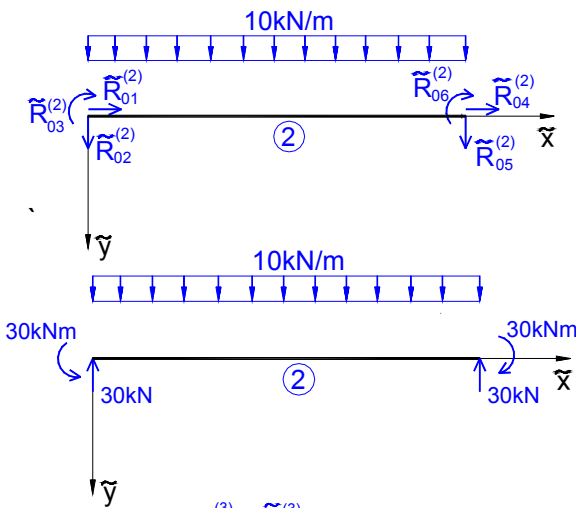
$$\alpha = \varphi_2 = 90^\circ$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

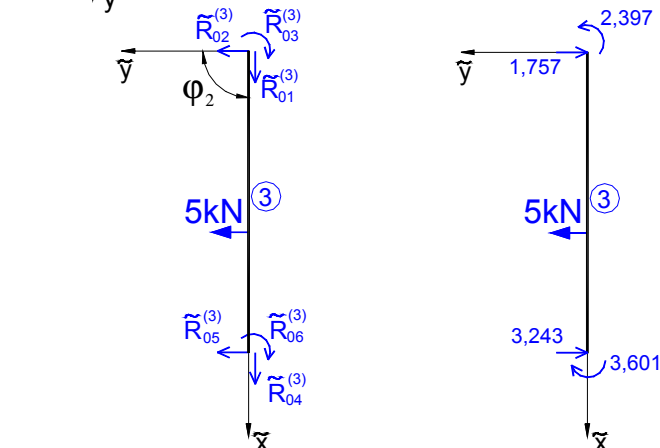
- wektory $\tilde{R}_0^{(e)}$ (dla pręta 1 przeprowadzono redukcję statyczną – przegub na prawym końcu)



$$\tilde{R}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_0^{(1)} = T^T \cdot \tilde{R}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\tilde{R}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -30 \\ 0 \\ -30 \\ 30 \end{bmatrix} = R_0^{(2)}$$



$$\tilde{R}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,757 \\ -2,397 \\ 0 \\ -3,243 \\ 3,601 \end{bmatrix} \quad R_0^{(3)} = T^T \cdot \tilde{R}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,757 \\ 0 \\ -2,397 \\ 3,243 \\ 0 \\ 3,601 \end{bmatrix}$$

- macierze sztywności prętów w układach lokalnych (przeprowadzono redukcję statyczną dla pręta z przegubem - $\tilde{P}_6^{(1)} = 0$) – wyniki z programu TRANS

$$\tilde{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 103940,0 & 0 & 0 & -103940,0 & 0 & 0 \\ 0 & 39,5 & 308,51 & 0 & -39,5 & 0 \\ 0 & 308,51 & 2409,53 & 0 & -308,51 & 0 \\ -103940,0 & 0 & 0 & 103940,0 & 0 & 0 \\ 0 & -39,5 & -308,51 & 0 & 39,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 182450,0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & 653,72 & 1961,17 & 0 & -653,72 & 1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 7844,67 & 0 & -1961,17 & 3922,33 \\ -182450,0 & 0 & 0 & 182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & -653,72 & -1961,17 & 0 & 653,72 & -1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 3922,33 & 0 & -1961,17 & 7844,67 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 162360,0 & 0 & 0 & -162360,0 & 0 & 0 \\ 0 & 602,21 & 1505,52 & 0 & -602,21 & 1505,52 \\ 0 & 1505,52 & 5018,4 & 0 & -1505,52 & 2509,2 \\ -162360,0 & 0 & 0 & 162360,0 & 0 & 0 \\ 0 & -602,21 & -1505,52 & 0 & 602,21 & -1505,52 \\ 0 & 1505,52 & 2509,2 & 0 & -1505,52 & 5018,4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} 182450,0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & 653,72 & 1961,17 & 0 & -653,72 & 1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 7844,67 & 0 & -1961,17 & 3922,33 \\ -182450,0 & 0 & 0 & 182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & -653,72 & -1961,17 & 0 & 653,72 & -1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 3922,33 & 0 & -1961,17 & 7844,67 \end{bmatrix}$$

- macierze sztywności prętów w układach globalnym

$$K^{(1)} = T^T \cdot \tilde{K}^{(1)} \cdot T = \begin{bmatrix} 61358,0 & -51098,8 & 197,5 & -61358,0 & 51098,8 & 0 \\ -51098,8 & 42621,8 & 237,0 & 51098,8 & -42621,8 & 0 \\ 197,5 & 237,0 & 2409,53 & -197,5 & -237,0 & 0 \\ -61358,0 & 51098,8 & -197,5 & 61358,0 & -51098,8 & 0 \\ 51098,8 & -42621,8 & -237,0 & -51098,8 & 42621,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = \tilde{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 182450,0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & 653,72 & 1961,17 & 0 & -653,72 & 1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 7844,67 & 0 & -1961,17 & 3922,33 \\ -182450,0 & 0 & 0 & 182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & -653,72 & -1961,17 & 0 & 653,72 & -1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 3922,33 & 0 & -1961,17 & 7844,67 \end{bmatrix}$$

$$K^{(3)} = T^T \cdot \tilde{K}^{(3)} \cdot T = \begin{bmatrix} 602,21 & 0 & -1505,52 & -602,21 & 0 & -1505,52 \\ 0 & 162360,0 & 0 & 0 & -162360,0 & 0 \\ -1505,52 & 0 & 5018,4 & 1505,52 & 0 & 2509,2 \\ -602,21 & 0 & 1505,52 & 602,21 & 0 & 1505,52 \\ 0 & -162360,0 & 0 & 0 & 162360,0 & 0 \\ -1505,52 & 0 & 2509,2 & 1505,52 & 0 & 5018,4 \end{bmatrix}$$

$$K^{(4)} = \tilde{K}^{(4)} = \begin{bmatrix} 182450,0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & 653,72 & 1961,17 & 0 & -653,72 & 1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 7844,67 & 0 & -1961,17 & 3922,33 \\ -182450,0 & 0 & 0 & 182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & -653,72 & -1961,17 & 0 & 653,72 & -1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 3922,33 & 0 & -1961,17 & 7844,67 \end{bmatrix}$$

- macierz sztywności w układzie globalnym (po agregacji)

$$K = \begin{bmatrix} 61358,0 & -51098,8 & 197,5 & & -61358,8 & 51098,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -51098,8 & 42621,8 & 237,0 & & 51098,8 & -42621,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 197,5 & 237,0 & 2409,53 & & -197,5 & -237,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -61358,0 & 51098,8 & -197,5 & 61358,0+182450,0+182450,0 & -51098,8 & 0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 \\ 51098,8 & -42621,8 & -237,0 & & -51098,8 & 42621,8+653,72+653,72 & 0 & 1961,17-1961,17 & 0 & -653,72 & 1961,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -653,72-1961,17 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1961,17-1961,17 & 0 & 7844,67+7844,67 & 0 & -1961,17 & 3922,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1961,17-3922,33 \\ 0 & 0 & 0 & & -182450,0 & 0 & 0 & 0 & 182450,0+602,21 & 0 & -1505,52 & -602,21 & 0 & -1505,52 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -653,72 & 0 & -1961,17 & 0 & 653,72+162360,0 & -1961,17 & 0 & -162360,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1961,17 & 0 & 3922,33 & -1505,52 & -1961,17 & 7844,67+5018,4 & 1505,52 & 0 & 2509,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & -602,21 & 0 & 1505,52 & 602,21 & 0 & 1505,52 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -162360,0 & 0 & 0 & 162360,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1505,52 & 0 & 2509,2 & 1505,52 & 0 & 5018,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -182450,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 182450,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -653,72 & 0 & 1961,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 653,72 & 1961,17 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & -1961,17 & 0 & 3922,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1961,17 & 7844,67 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 61358,0 & -51098,8 & 197,5 & -61358,8 & 51098,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -51098,8 & 42621,8 & 237,0 & 51098,8 & -42621,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 197,5 & 237,0 & 2409,53 & -197,5 & -237,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -61358,0 & 51098,8 & -197,5 & 426258,0 & -51098,8 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 & 0 \\ 51098,8 & -42621,8 & -237,0 & -51098,8 & 43929,24 & 0 & 0 & 0 & -653,72 & 1961,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & -653,72 & -1961,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15689,34 & 0 & -1961,17 & 3922,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1961,17 & 3922,33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 & 0 & 183052,21 & 0 & -1505,52 & -602,21 & 0 & -1505,52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -653,72 & 0 & -1961,17 & 0 & 163013,72 & -1961,17 & 0 & -162360,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1961,17 & 0 & 3922,33 & -1505,52 & -1961,17 & 12863,07 & 1505,52 & 0 & 2509,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -602,21 & 0 & 1505,52 & 602,21 & 0 & 1505,52 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -162360,0 & 0 & 0 & 162360,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1505,52 & 0 & 2509,2 & 1505,52 & 0 & 5018,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 182450,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -653,72 & 0 & 1961,17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 653,72 & 1961,17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1961,17 & 0 & 3922,33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1961,17 & 7844,67 & 0 \end{bmatrix}$$

- po uwzględnieniu warunków podparcia ($q_1 = q_2 = q_3 = q_{11} = q_{12} = q_{13} = q_{14} = q_{15} = q_{16} = 0$; $\tilde{P}_6^{(1)} = 0 \Rightarrow$ redukujemy 1, 2, 3, 11, 12, 13, 14, 15, 16 oraz 6 wiersz i kolumnę macierzy K oraz odpowiednie wyrazy wektora P)

$$K = \begin{bmatrix} 426258,0 & -51098,8 & 0 & -182450,0 & 0 & 0 \\ -51098,8 & 43929,24 & 0 & 0 & -653,72 & 1961,17 \\ 0 & 0 & 15689,34 & 0 & -1961,17 & 3922,33 \\ -182450,0 & 0 & 0 & 183052,21 & 0 & -1505,52 \\ 0 & -653,72 & -1961,17 & 0 & 163013,72 & -1961,17 \\ 0 & 1961,17 & 3922,33 & -1505,52 & -1961,17 & 12863,07 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \\ -11,757 \\ 30 \\ -27,603 \end{bmatrix}$$

- po rozwiązaniu układu równań za pomocą programu URL otrzymujemy wektor przemieszczeń węzłowych q , w którym występuje nieznaną kąta obrotu q_6 , niepotrzebny do obliczenia końcowych sił; jest to wynikiem wykonania redukcji statycznej na pręcie 1

$$K \cdot q = P \quad \Rightarrow \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,325544 \\ 1,86216 \\ q_6 \\ 0,66586 \\ 0,239032 \\ 0,168482 \\ -2,5792 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Obliczenie sił węzłowych dla poszczególnych prętów

- wektory przemieszczeń elementów w układzie globalnym

$$q^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,325544 \\ 1,86216 \\ q_6 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \quad q^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,325544 \\ 1,86216 \\ 0,66586 \\ 0,239032 \\ 0,168482 \\ -2,5792 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \quad q^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,239032 \\ 0,168482 \\ -2,5792 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \quad q^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,325544 \\ 1,86216 \\ 0,66586 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

- transformacja do układów lokalnych $\tilde{q}^{(e)} = T \cdot q^{(e)}$

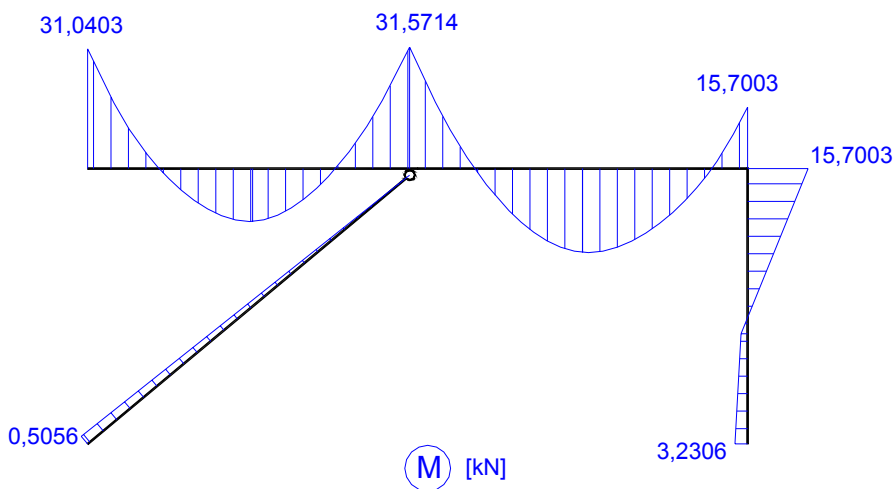
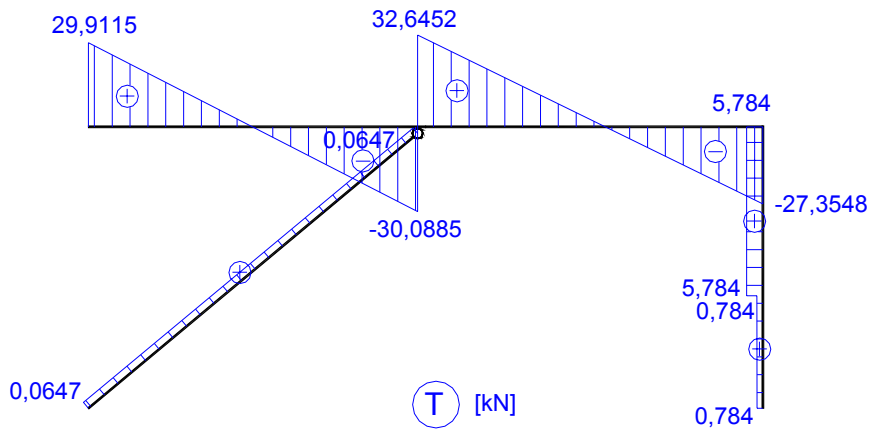
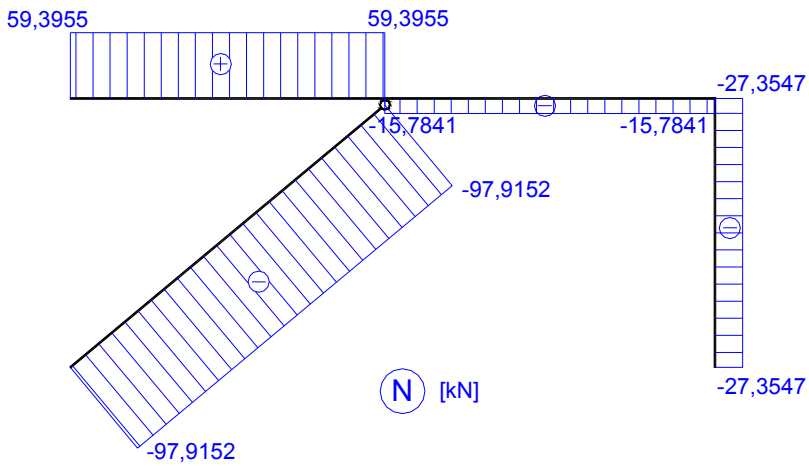
$$\tilde{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,942036 \\ 1,638959 \\ q_6 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \quad \tilde{q}^{(2)} = q^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,325544 \\ 1,86216 \\ 0,66586 \\ 0,239032 \\ 0,168482 \\ -2,5792 \end{bmatrix} \times 10^{-3};$$

$$\tilde{q}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0,168482 \\ -0,239032 \\ -2,5792 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \quad \tilde{q}^{(4)} = q^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,325544 \\ 1,86216 \\ 0,66586 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

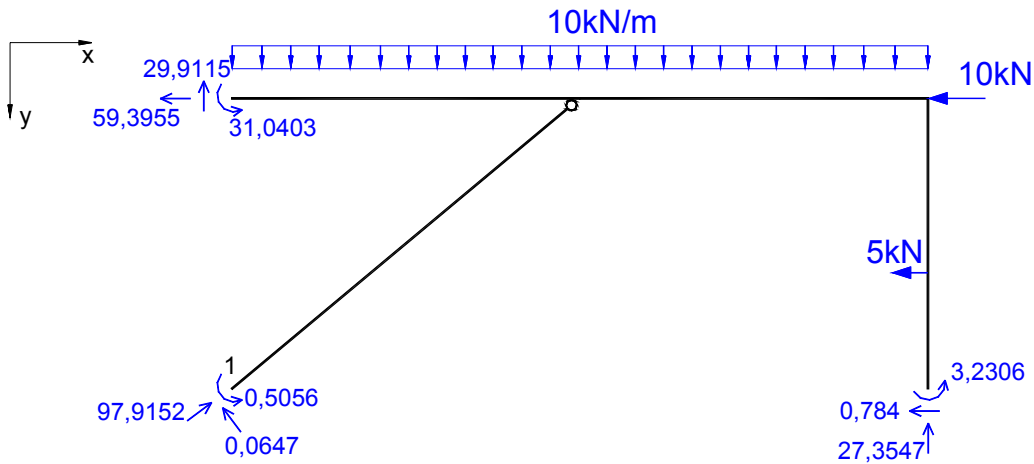
- wektory reakcji węzłowych: $\tilde{R}^{(e)} = \tilde{K}^{(e)} \tilde{q}^{(e)} + \tilde{R}^{(e)}$

$$\tilde{R}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 97,9152 \\ -0,0647 \\ -0,5056 \\ -97,9152 \\ 0,0647 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{R}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 15,7841 \\ -32,6452 \\ -31,5714 \\ -15,7841 \\ -27,3548 \\ 15,7003 \end{bmatrix}; \quad \tilde{R}_0^{(3)} = \begin{bmatrix} 27,3547 \\ -5,7840 \\ -15,7003 \\ -27,3547 \\ 0,7840 \\ -3,2306 \end{bmatrix}; \quad \tilde{R}_0^{(4)} = \begin{bmatrix} -59,3955 \\ -29,9115 \\ -31,0403 \\ 59,3955 \\ -30,0885 \\ 31,5714 \end{bmatrix}$$

- wykresy sił wewnętrznych:



- kontrola statyczna:



$$\sum X = 0: -59,3955 - 10 - 5 - 0,784 - 0,0647 \sin \varphi_1 + 97,9152 \cos \varphi_1 = 0 \quad -0,00038 \neq 0$$

$$\sum Y = 0: 10 \cdot 12 - 27,3547 - 29,9115 - 97,9152 \sin \varphi_1 - 0,0647 \cos \varphi_1 = 0 \quad 0,00031 \neq 0$$

$$\sum M_1 = 0: -0,5056 - 3,2306 - 31,0403 + 10 \cdot 12 \cdot 6 - 59,3955 \cdot 5 - 10 \cdot 5 - 5 \cdot 2 - 27,3547 \cdot 12 = 0 \quad -0,01 \neq 0$$