

MECHANIKA BUDOWLI / SEM.4 / ĆWICZENIE NR 1

## METODA PRZEMIESZCZEŃ

Termin oddania: 06.05.2025

| Data | Uwagi sprawdzającego | Podpis |
|------|----------------------|--------|
|      |                      |        |

~~ opracowanie: mgr inż. Anita Kaczor ~~ <https://anita.kaczor.pracownik.put.poznan.pl> ~~

Dla zadanej **RAMY**: / **Nr schematu: 4**

1. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.
2. Sprawdzić naprężenia w obu grupach przekrojów  $I_1$  i  $I_2$ , porównać je z wartościami dopuszczalnymi naprężeń i sformułować wnioski (w przypadku niespełnienia warunku nośności, obliczeń nie trzeba powtarzać).
3. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego osiadania podpór, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.

Dla zadanej **BELKI**: / **Nr schematu: 3**

1. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.
2. Korzystając z metody przemieszczeń w ujęciu macierzowym obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia.

W obliczeniach przyjąć:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $f_y = 235 \text{ MPa}$ .

### DANE DLA RAMY

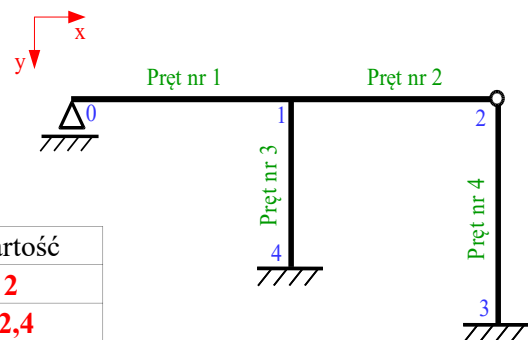
Nr schematu: **4**

Wymiary i obciążenie przeszłowe:

| Pręt | L [m]      | Przekrój         | q [kN/m]   | P [kN]     | M [kNm]    |
|------|------------|------------------|------------|------------|------------|
| 1    | <b>5</b>   | <b>I 360</b>     | <b>0</b>   | <b>0</b>   | <b>0</b>   |
| 2    | <b>3,3</b> | <b>I 360</b>     | <b>0</b>   | <b>-34</b> | <b>0</b>   |
| 3    | <b>3</b>   | <b>I 160 HEB</b> | <b>0</b>   | <b>0</b>   | <b>-33</b> |
| 4    | <b>3,5</b> | <b>I 160 HEB</b> | <b>-10</b> | <b>0</b>   | <b>0</b>   |

Obciążenie węzłowe:

|                                 |                |
|---------------------------------|----------------|
| siła skupiona pionowa w węźle 1 | <b>20 kN</b>   |
| moment skupiony w węźle 1       | <b>-25 kNm</b> |



Osiadanie podpór:

| Kierunek osiadania  | Nr węzła | Wartość     |
|---------------------|----------|-------------|
| <b>kątowe [°]</b>   | 4        | <b>2</b>    |
| <b>pionowe [cm]</b> | 4        | <b>-2,4</b> |
| <b>pionowe [cm]</b> | 0        | <b>1,8</b>  |
| <b>poziome [cm]</b> | 3        | <b>2,2</b>  |

### DANE DLA BELKI

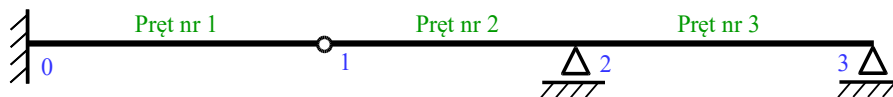
Nr schematu: **3**

Wymiary i obciążenie przeszłowe:

| Pręt | L [m]      | Przekrój         | q [kN/m]  | P [kN]     |
|------|------------|------------------|-----------|------------|
| 1    | <b>4</b>   | <b>I 400 HEB</b> | <b>10</b> | <b>0</b>   |
| 2    | <b>3</b>   | <b>I 270 PE</b>  | <b>0</b>  | <b>-37</b> |
| 3    | <b>5,5</b> | <b>I 400 HEB</b> | <b>10</b> | <b>0</b>   |

Obciążenie węzłowe:

|                                 |                |
|---------------------------------|----------------|
| siła skupiona pionowa w węźle 1 | <b>-30 kN</b>  |
| moment skupiony w węźle 2       | <b>-50 kNm</b> |



### LEGENDA

Obciążenie przeszłowe:

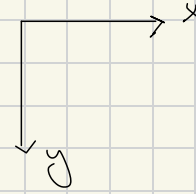
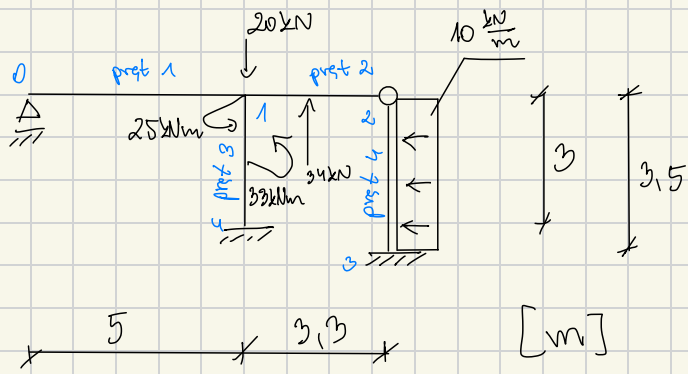
- obciążenie równomiernie rozłożone  $q$  działa na całej długości pręta, prostopadle do osi pręta;
- siła  $P$  prostopadła do osi pręta, przyłożona w połowie długości pręta;
- moment skupiony  $M$  przyłożony w połowie długości pręta.

Obciążenie przeszłowe i węzłowe – zwroty:

- siły skupione, obciążenie równomiernie rozłożone oraz liniowe osiadania podpór – wartość dodatnia oznacza zwrot zgodny z osią układu współrzędnych, który jest zaznaczony na schemacie, ujemna – przeciwny;
- momenty skupione oraz osiadania kątowe – wartość dodatnia oznacza zwrot w prawo, ujemna – w lewo.

# Schemat 1

RAMA

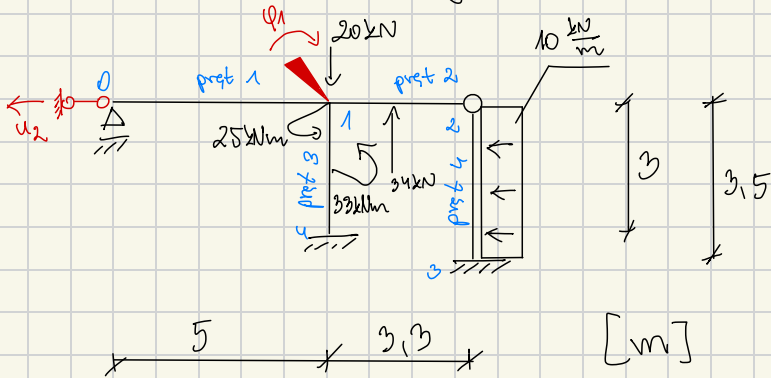


$$\sum \varphi = 1$$

$$\sum u = 1$$

$$SGN = 1 + 1 = 2$$

## układ podstawowy



przekrój dla prętów 1,2 : I 360

$$I_1 = 18610 \text{ cm}^4$$

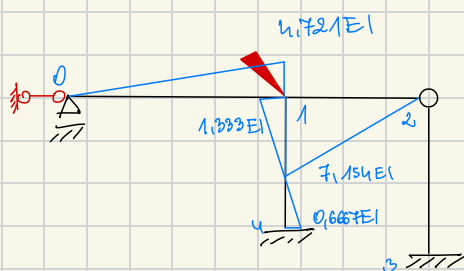
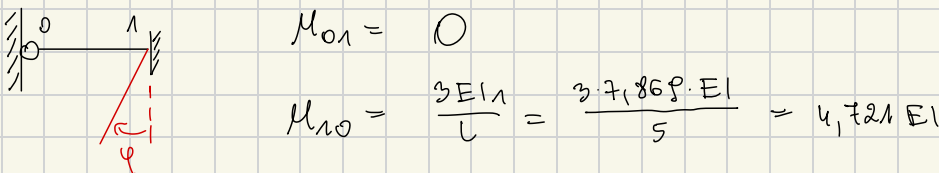
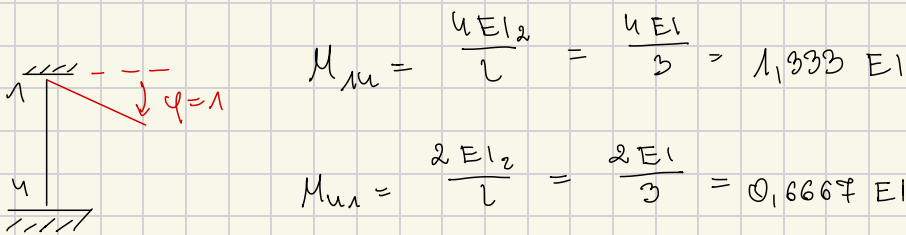
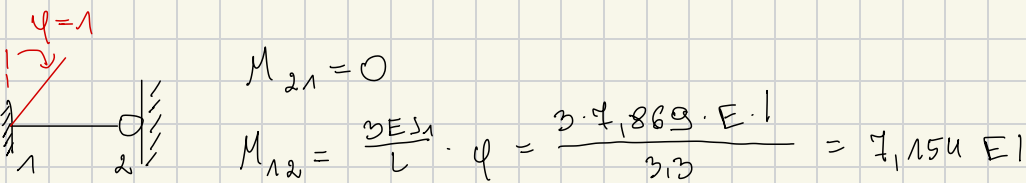
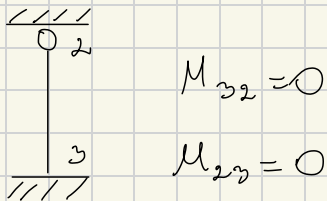
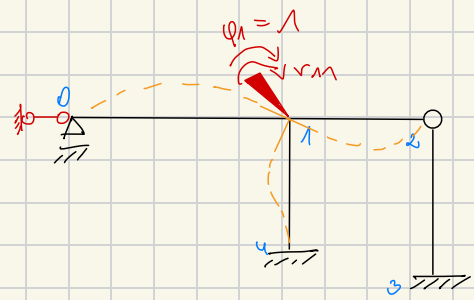
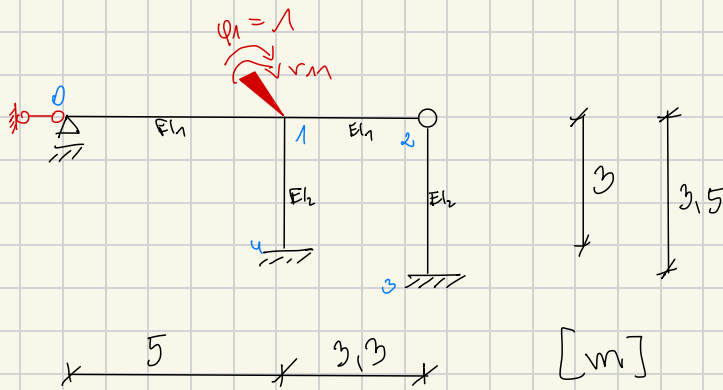
przekrój dla prętów 3,4 : I 160 HEB

$$I_2 = 2492 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{18610}{2492} = 7,469 \quad I_1 = 7,469 I_2$$

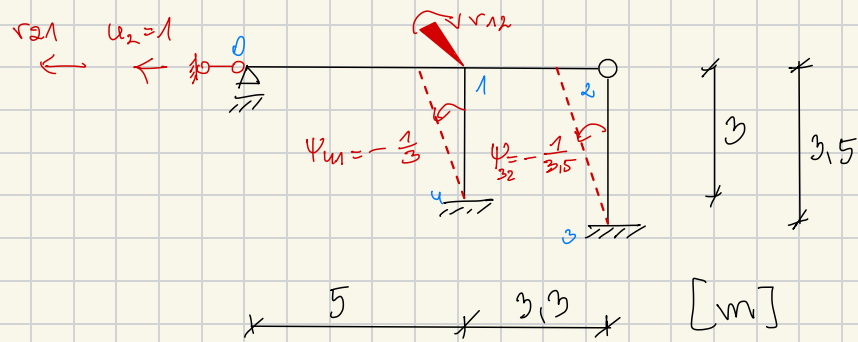
$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

Stem  $\varphi_1 = 1$



$M_1$

Start  $u_2 = 1$

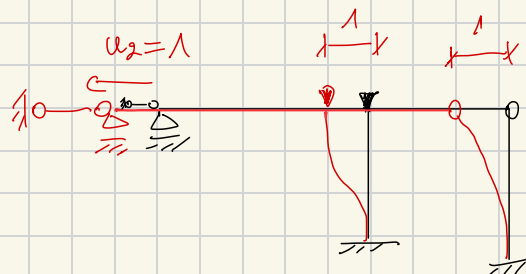
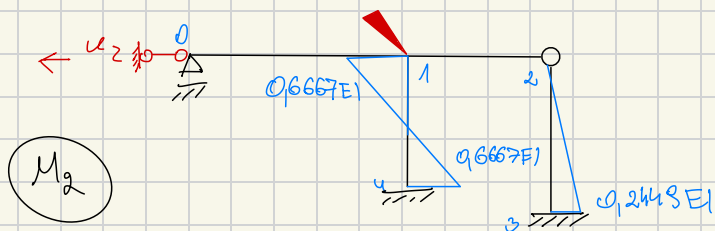


$M_{01} = 0 = M_{10}$

$M_{u1} = -\frac{6EI}{L} \cdot \psi_{u1} = \frac{6EI}{3} = 0,6667 EI = M_{11}$

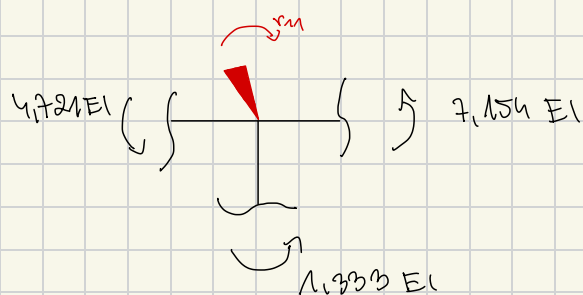
$M_{12} = 0 = M_{21}$

$M_{23} = 0$   
 $M_{32} = -\frac{3EI}{L} \cdot \psi_{u2} = \frac{3EI}{3,5} = 0,2449 EI$



## wyznaczenie $r_{ik}$

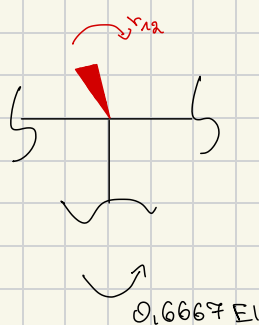
rownowaga momentów w wieżie 1 w stanie  $\varphi_1 = 1$



$$\sum M_1 = 0$$

$$r_{11} = 13.208 EI$$

rownowaga momentów w wieżie 1 w stanie  $u_2 = 1$



$$\sum M_1 = 0$$

$$r_{12} = 0.6667 EI$$

wyznaczenie reakcji  $r_{21}$

$F^{(1)}$

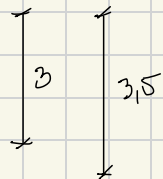
$$\sum_j D_j^{(1)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_n M_{ik}^{(1)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + 4.721 EI \cdot \bar{0} + (1.333 EI + 0.6667 EI) \cdot$$

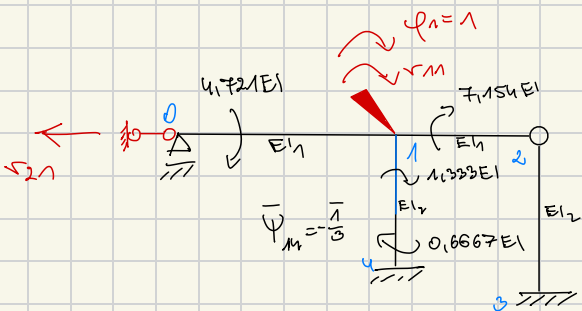
$$\cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 7.154 EI \cdot \bar{0} = 0$$

$$r_{21} = 0.6667 EI = r_{12}$$

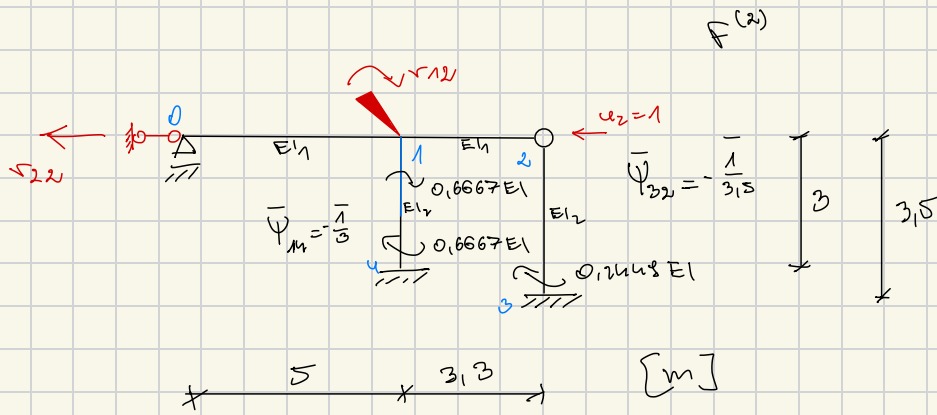
$$\bar{\psi}_{32} = -\frac{1}{3.5}$$



5 3.5 [m]



## wyznaczenie reakcji $r_{22}$



$$\sum_i r_j^{(2)} \cdot \bar{\delta}_j + \sum_n M_{ik}^{(2)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{22} \cdot 1 + (0,6667 EI \cdot 2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 0,2448 EI \cdot \left(-\frac{1}{3,5}\right) = 0$$

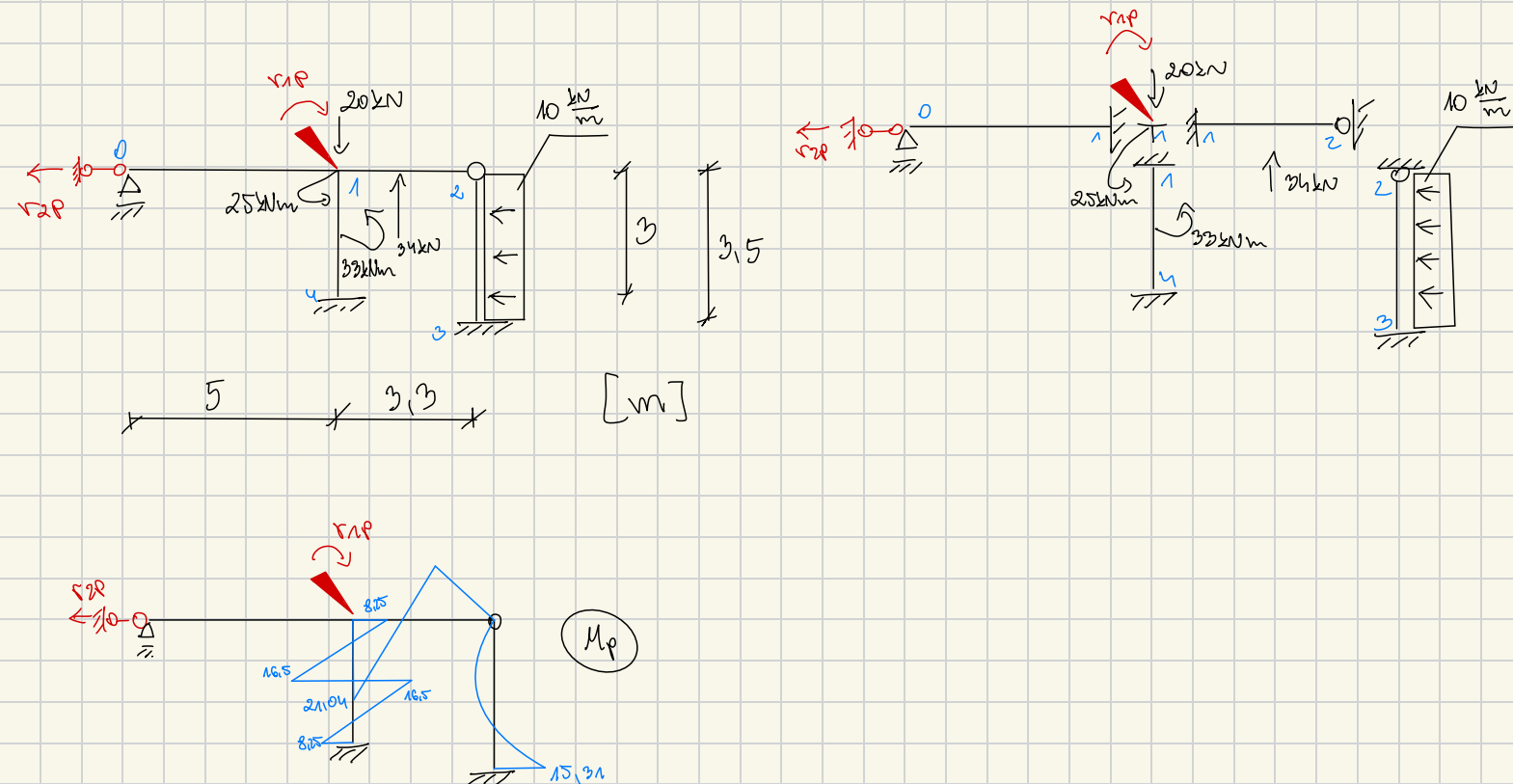
$$r_{22} = 0,5144 EI$$

## macierz sztywności

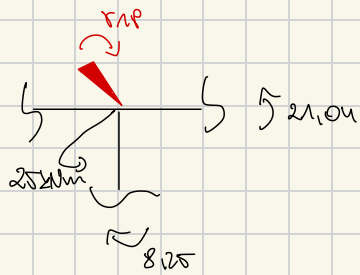
$$k = \begin{bmatrix} 13,208 EI & 0,6667 EI \\ 0,6667 EI & 0,5144 EI \end{bmatrix}$$

## wyznaczenie $r_{1p}$

### wyznaczenie reakcji $r_{1p}$



rownowaga momentow w węźle 1



$$\sum M_1^{(P)} = 0$$

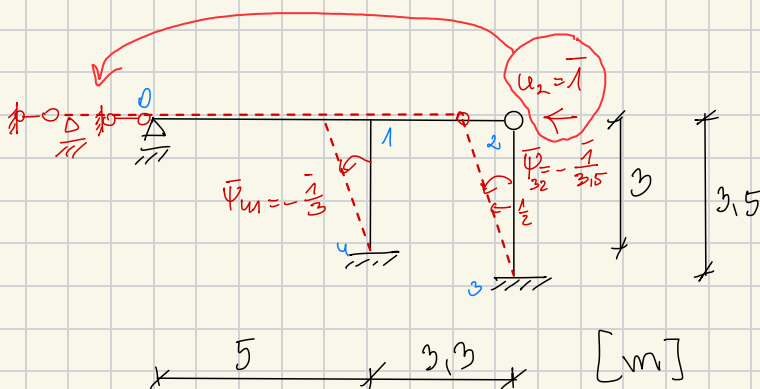
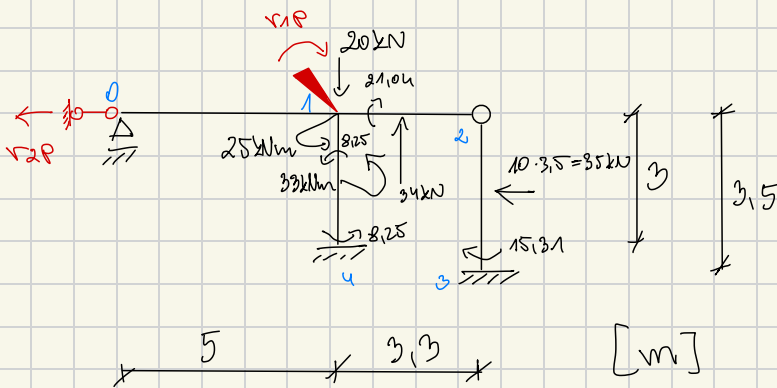
$$r_{1P} = 27.79 \text{ kNm}$$

$$\sum Q \cdot \bar{z} + \sum P''_i \cdot \bar{z}'' + \sum M_{ik}^{(P)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{2P} \cdot \bar{1} + 35 \cdot \frac{\bar{1}}{2} + (33 + 2 \cdot 8.25) \cdot \frac{\bar{1}}{3} + 15.31 \cdot \left(-\frac{1}{3.5}\right) + 34 \cdot \bar{0} + 21.04 \cdot \bar{0} + 20 \cdot \bar{0} + 25 \cdot \bar{0} = 0$$

wyznaczenie reakcji  $r_{2P}$

$$r_{2P} = -29.63 \text{ kN}$$



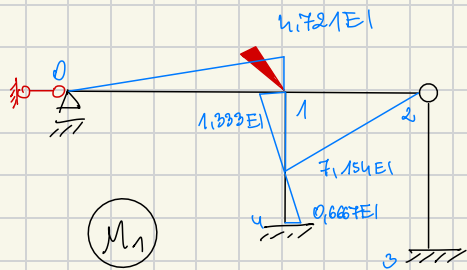
wyznaczenie niewiadomych  $\varphi_1$  i  $u_2$

$$\begin{cases} 13.208 EI \varphi_1 + 0.6667 EI u_2 + 27.79 = 0 \\ 0.6667 EI \varphi_1 + 0.5144 EI u_2 - 29.63 = 0 \end{cases}$$

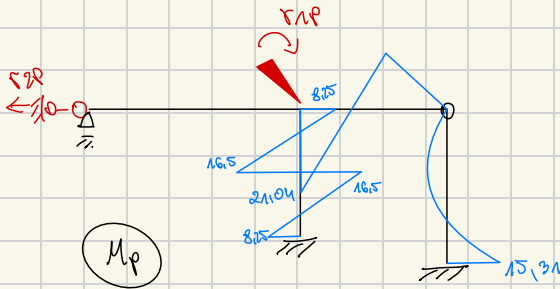
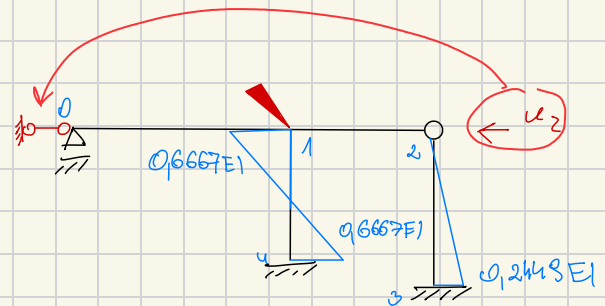
$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{-6.142}{EI} \\ u_2 = \frac{65.16}{EI} \end{cases}$$

wyznaczenie rozkładu momentow zginajacych

$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(h)} \varphi_1 + M_{ik}^{(u)} u_2 + M_{ik}^{(P)}$$



$M_2$



$M_p$

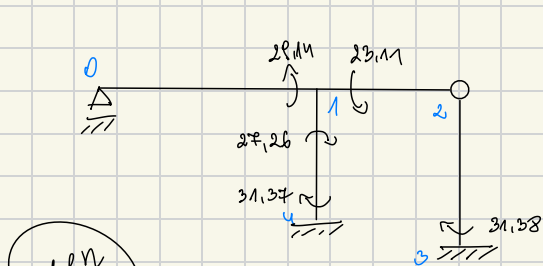
$$M_{10}^n = 4,721EI \left( -\frac{6,172}{EI} \right) = -29,14 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^n = 7,154EI \cdot \left( -\frac{6,172}{EI} \right) + 21,04 = -23,11 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^n = 0,2449EI \cdot \frac{65,6}{EI} + 15,31 = 31,38 \text{ kNm}$$

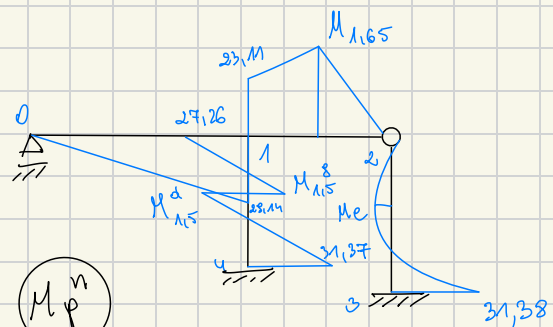
$$M_{14}^n = 1,333EI \cdot \left( -\frac{6,172}{EI} \right) + 0,6667EI \cdot \frac{65,6}{EI} - 8,25 = 27,26 \text{ kNm}$$

$$M_{41}^n = 0,6667EI \cdot \left( -\frac{6,172}{EI} \right) + 0,6667EI \cdot \frac{65,6}{EI} - 8,25 = 31,37 \text{ kNm}$$



$M_p^n$

[kNm]



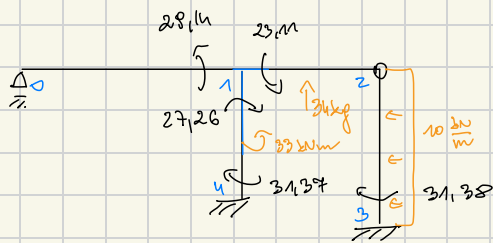
$M_p^n$

[kNm]

ównowaga w węzle 1

$$-29,14 + 27,26 - 23,11 + 25 = 0$$

$$0,01 \approx 0$$



$$\sum M_3 = 0$$

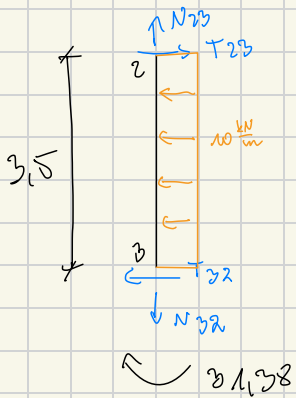
$$T_{23} \cdot 3.5 - 10 \cdot 3.5 \cdot 1.75 + 31.38 = 0$$

$$T_{23} = 8.594 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$T_{32} \cdot 3.5 + 31.38 + 10 \cdot 3.5 \cdot 1.75 = 0$$

$$T_{32} = -26.47 \text{ kN}$$



$M(x)$

$$T(x) = T_{32} + 10x$$

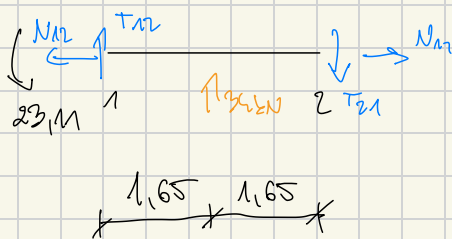
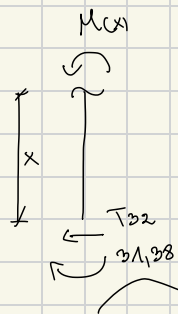
$$-26.47 + 10x = 0$$

$$x = 2.647 \text{ m}$$

$$M(x) = T_{32} \cdot x + 31.38 + 10x \cdot \frac{1}{2}x$$

$$M(x) = 5x^2 - 26.47x + 31.38$$

$$M_{\text{ext}} = -3.653 \text{ kNm}$$



$$\sum M_1 = 0$$

$$-24 \cdot 1.65 + T_{21} \cdot 3.3 - 23.11 = 0$$

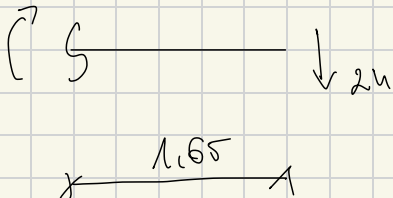
$$T_{21} = 24 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

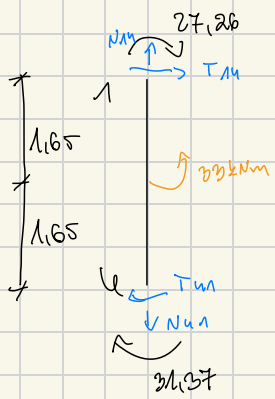
$$-23.11 + T_{12} \cdot 3.3 + 24 \cdot 1.65 = 0$$

$$T_{12} = -3.987 \text{ kN}$$

$M_{1.65}$



$$M_{1.65} = -24 \cdot 1.65 = -39.6 \text{ kNm}$$



$$\sum M_1 = 0$$

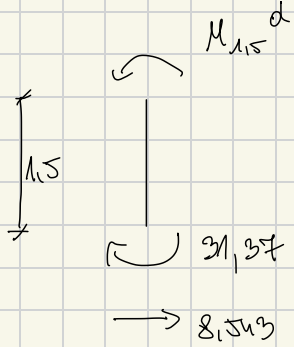
$$T_{14} \cdot 3 + 31.37 - 33 + 27.26 = 0$$

$$T_{14} = -8.543 \text{ kN}$$

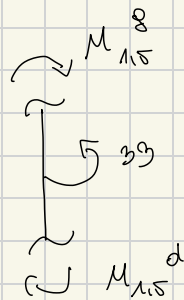
$$\sum M_u = 0$$

$$T_{14} \cdot 3 + 27.26 - 33 + 31.37 = 0$$

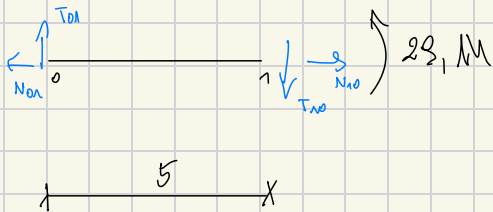
$$T_{14} = -8.543 \text{ kN}$$



$$M_{1.5}^d = 31.37 - 8.543 \cdot 1.5 = 18.56 \text{ kNm}$$



$$M_{1.5}^g = 33 - M_{1.5}^d = 33 - 18.56 = 14.44 \text{ kNm}$$



$$\sum M_1 = 0$$

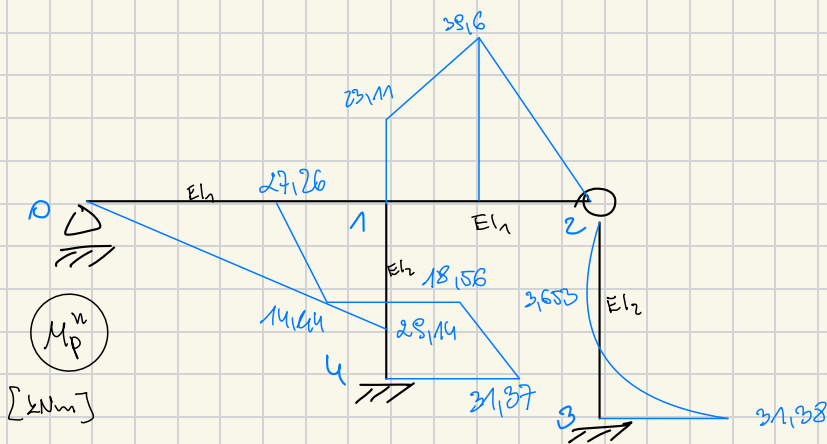
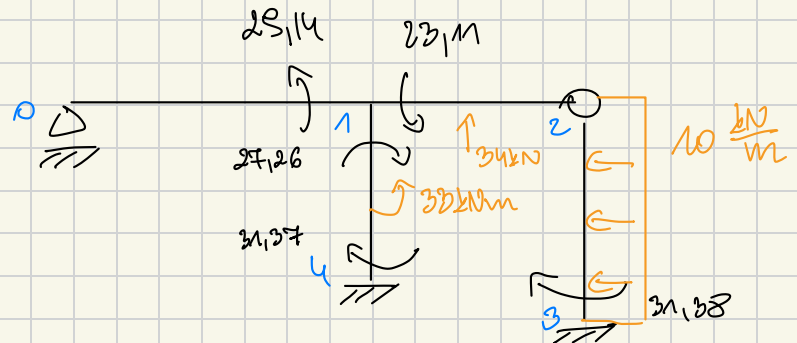
$$T_{01} \cdot 5 - 28.14 = 0$$

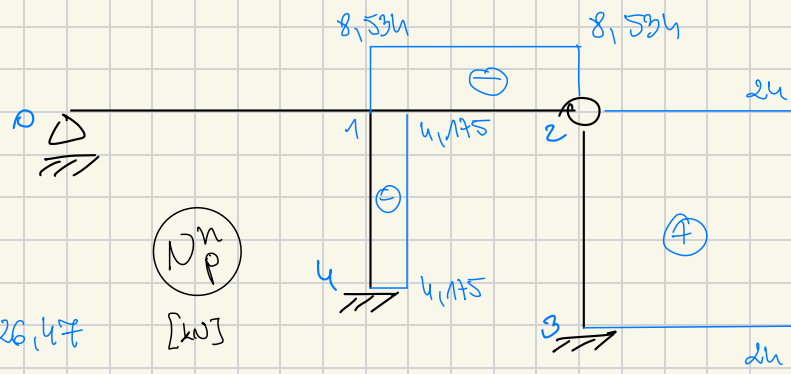
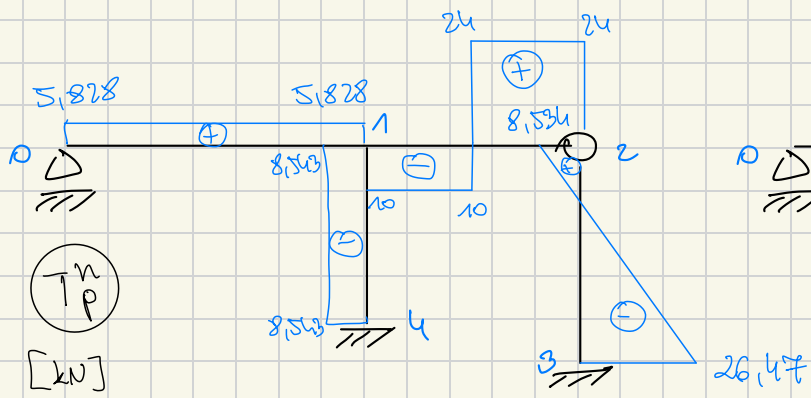
$$T_{01} = 5.828 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

$$T_{10} \cdot 5 - 28.14 = 0$$

$$T_{10} = 5.828 \text{ kN}$$

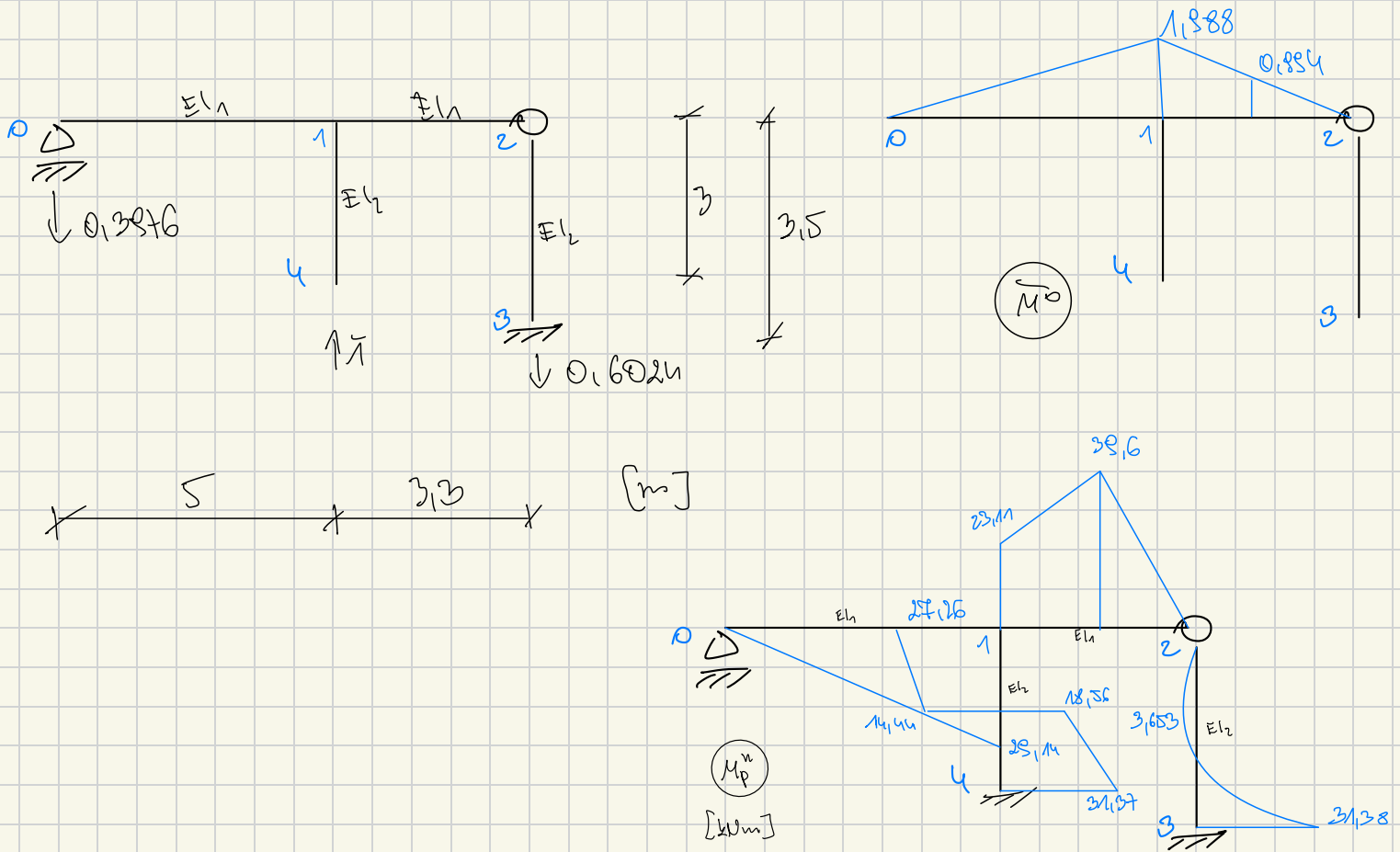




Siły wewnętrzne wyznaczone  
po sprawdzeniu kinematycznym

# Kontrola kinematyczna - sprawdzenie przemieszczenia pionowego

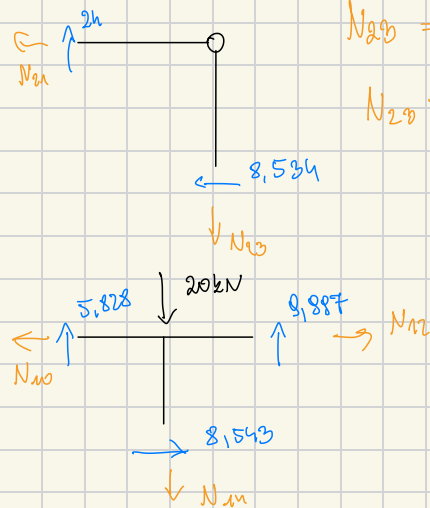
w węzle 4



$$V_0 = \frac{1}{EI_1} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 28.11 \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot 1.888 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1.65 \cdot 23.11 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1.888 + \frac{1}{3} \cdot 0.884 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1.65 \cdot 38.6 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0.884 + \frac{1}{3} \cdot 1.888 \right) + \frac{1}{2} \cdot 38.6 \cdot 1.65 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0.884 \right) \right] = \frac{0.01688}{EI_1}$$

$$|V_0| < \frac{1}{EI_1} \Rightarrow V_0 \approx 0 \Rightarrow \text{OK}$$

# Wyznaczenie rozkładu sił normalnych



$$N_{20} = 24 \text{ kN}$$

$$N_{21} = -8.534 \text{ kN}$$

$$N_{20} = N_{32}$$

$$N_{21} = N_{12}$$

$$\sum X = 0$$

$$-N_{10} + N_{12} + 8.543 = 0$$

$$N_{10} = -8.534 + 8.543$$

$$N_{10} = 0.009 \text{ kN} \approx 0$$

$$N_{10} = N_{01}$$

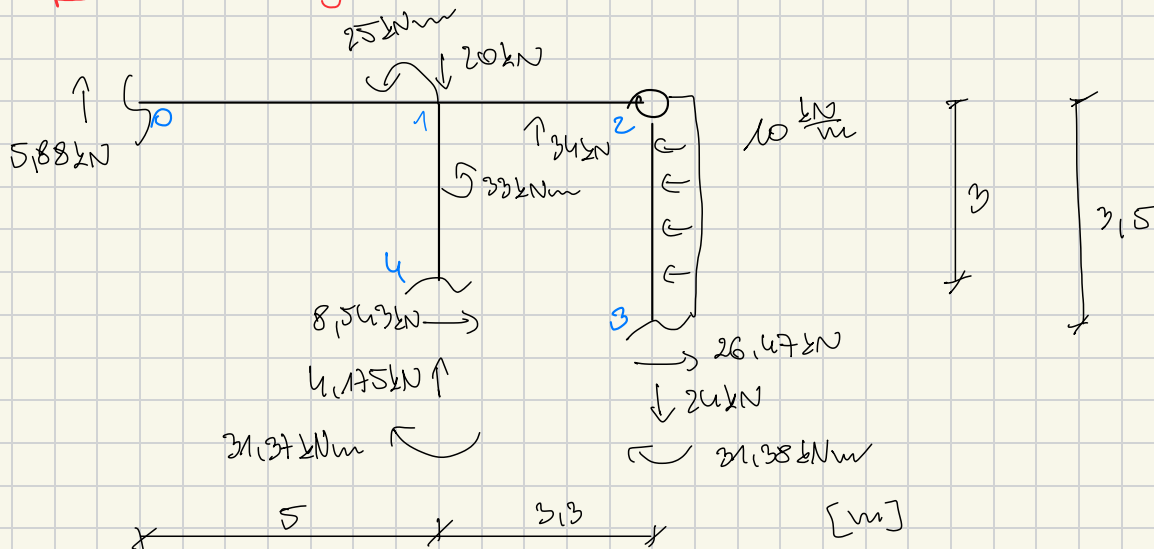
$$\sum Y = 0$$

$$+5.828 - 20 + 8.897 - N_{11} = 0$$

$$N_{11} = -4.175 \text{ kN}$$

$$N_{11} = N_{11}$$

## Sprawdzenie statyczne



$$\sum Y = 0 \quad 5.828 - 20 + 4.175 + 24 - 24 = 0.003 \approx 0$$

$$\sum X = 0 \quad -0.009 + 8.543 - 10 \cdot 3.5 + 26.47 = 0.004 \approx 0$$

$$\begin{aligned} \sum M = 0 \quad & 5.828 \cdot 5 - 25 - 33 + 21.97 - 8.543 \cdot 3 - 24 \cdot 1.65 + 10 \cdot 3.5 \cdot 1.75 \\ & - 26.47 \cdot 3.5 + 21.98 + 24 \cdot 3.3 = -0.034 \approx 0 \end{aligned}$$

## Sprawdzenie naprężeń normalnych wywołanych momentem zginającym

- przekrój dla prętów 1,2: I 360

$$M_{\max} = |3360| \text{ kNm}$$

$$|M_{\max}| = 33,60 \text{ kNm}$$

$$I_1 = 18610 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3360}{1090} + \frac{8531}{87} = 3,721 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 37,21 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}}$$

$$W_y = 1090 \text{ cm}^3$$

$$A = 97 \text{ cm}^2$$

- przekrój dla prętów 3,4: I 160 HEB

$$M_{\max} = |31,38| \text{ kNm}$$

$$|M_{\max}| = 31,38 \text{ kNm}$$

$$I_2 = 2482 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3138}{311} + \frac{24}{54,3} = 10,53 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 105,3 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}}$$

$$W_y = 311 \text{ cm}^3$$

$$A = 54,3 \text{ cm}^2$$

### Wnioski:

- dla prętów 1 i 2 przyjęty przekrój spełnia warunek nośności, lecz wykorzystuje tylko 15,8% jego nośności. Dla efektywności należałoby zmniejszyć przekrój.

- dla prętów 3 i 4 przyjęty przekrój spełnia warunek nośności, lecz wykorzystuje tylko 44,8% jego nośności. Dla efektywności należałoby zmniejszyć przekrój.

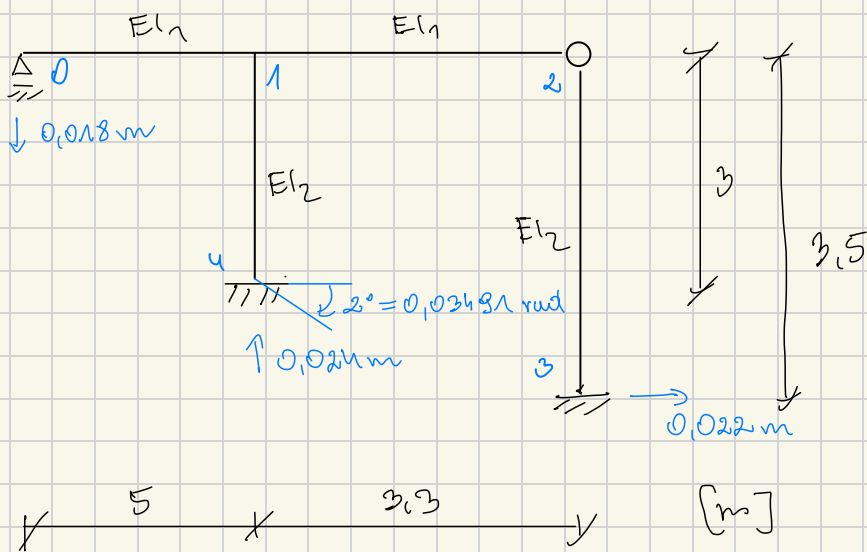
- zmiana przekrojów spowoduje zmianę wartości współczynnika  $n = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ , dlatego obliczenia należy powtórzyć i ponownie sprawdzić naprężenia.

# Ramie - osiudnienie podpór

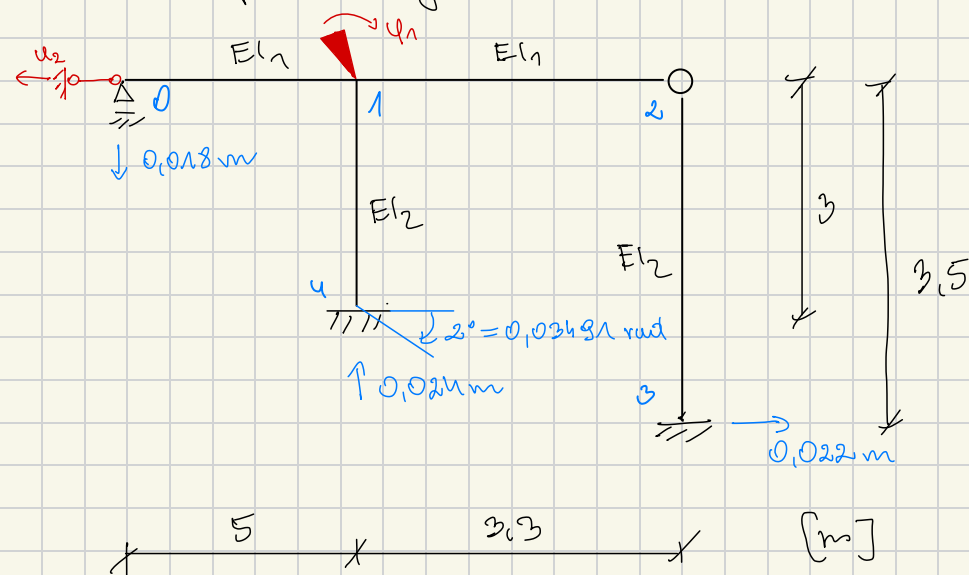
Uwaga! W tej części projektu nie jest zachowana skala w odniesieniu do wymiarów ramy.

W tym aspekcie proszę nie brać przykładu z niniejszego projektu :)

układ rzeczywisty

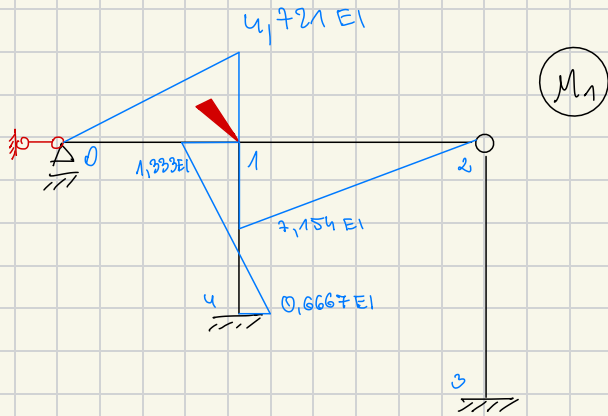


układ podstawowy

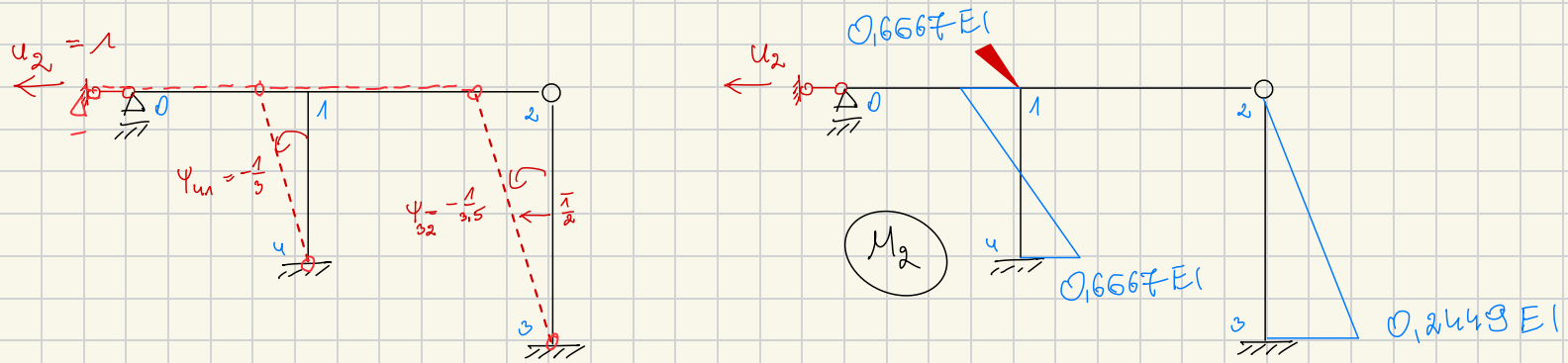


$$\begin{cases} r_{11} \cdot \phi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1\Delta} = 0 \\ r_{21} \cdot \phi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2\Delta} = 0 \end{cases}$$

stan  $\varphi_1 = 1$  - taki sam, jak w przypadku 2 obciążeniem  
sitami zewnętrznymi



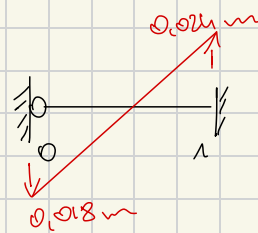
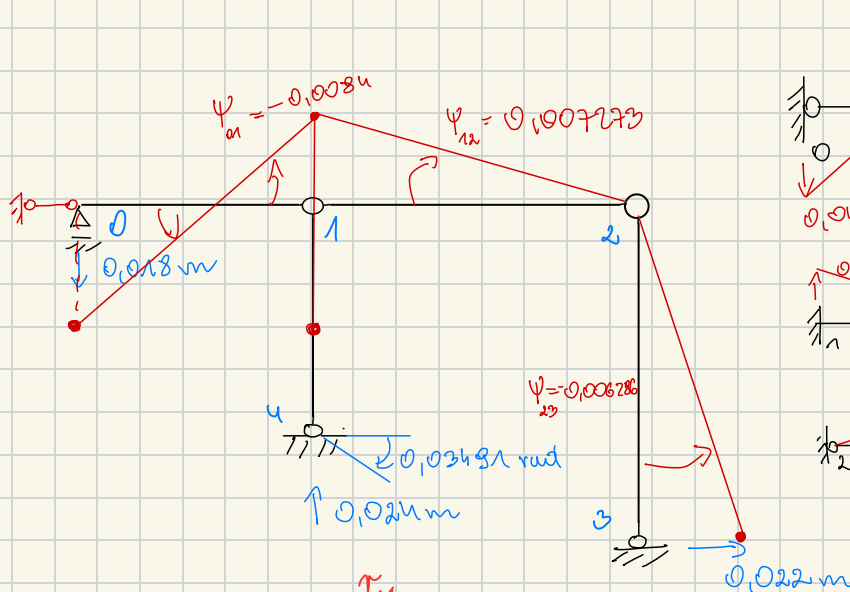
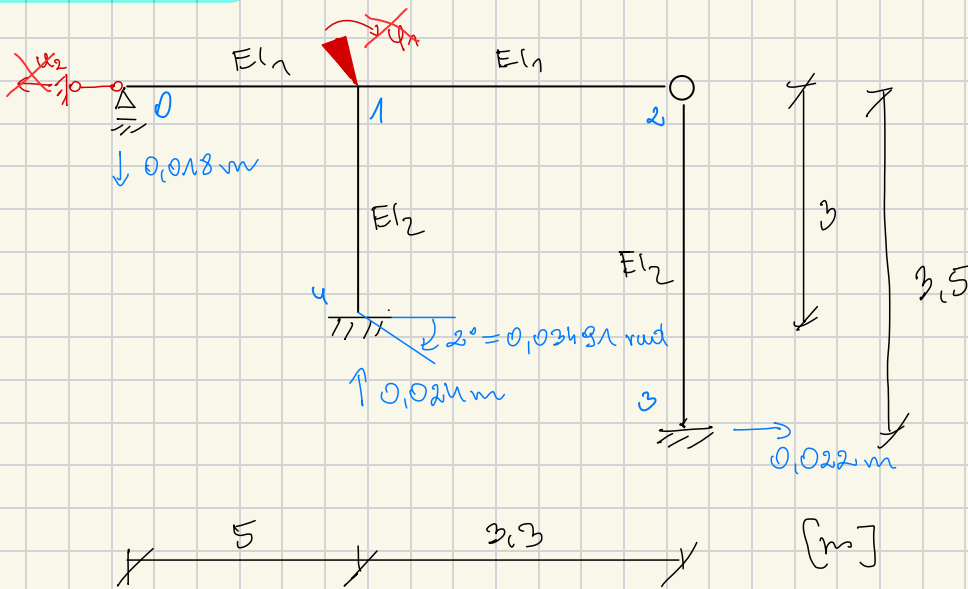
stan  $u_2 = 1$  - taki sam, jak w przypadku 2 obciążeniem  
sitami zewnętrznymi



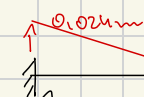
macierz sztywności

$$k = \begin{bmatrix} 13.28 EI & 0.6667 EI \\ 0.6667 EI & 0.5144 EI \end{bmatrix}$$

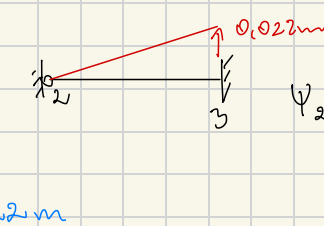
Stab "Δ"



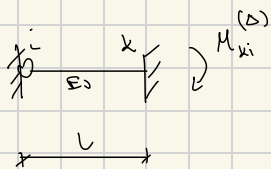
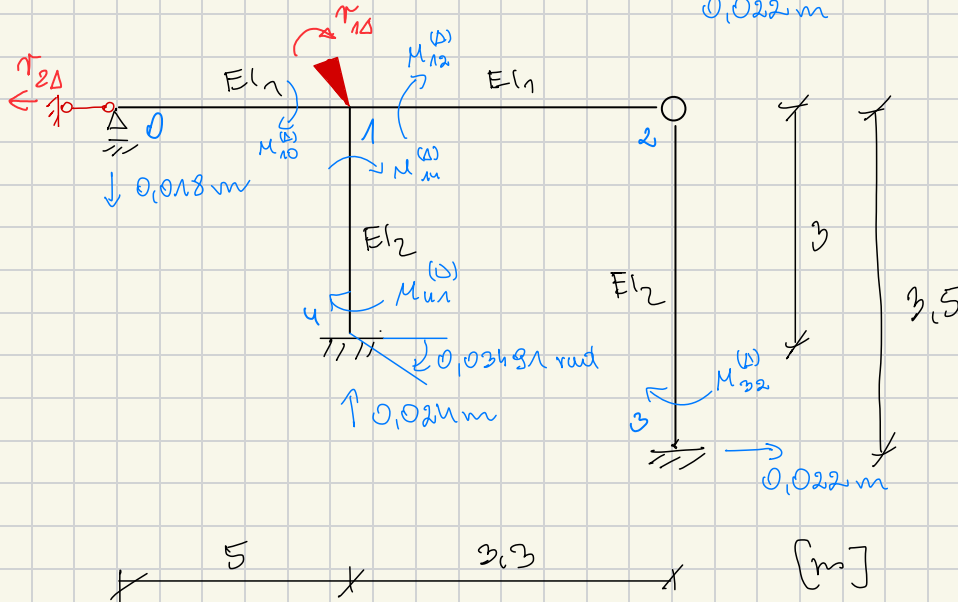
$$\psi_{01} = \frac{-0.024 - (0.018)}{5} = -0.0024$$



$$\psi_{12} = \frac{0 - (-0.024)}{3.3} = 0.007273$$



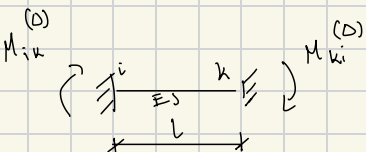
$$\psi_{23} = \frac{-0.022 - 0}{3.5} = -0.006286$$

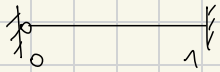


$$M_{ki}^{(\Delta)} = \frac{3ES}{L} (\varphi_k^{(\Delta)} - \psi_{ik}^{(\Delta)})$$

$$M_{ik}^{(\Delta)} = \frac{2ES}{L} (2\varphi_i^{(\Delta)} + \varphi_k^{(\Delta)} - 3\psi_{ik}^{(\Delta)})$$

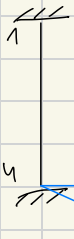
$$M_{ki}^{(\Delta)} = \frac{2EI}{L} (2\varphi_k^{(\Delta)} + \varphi_i^{(\Delta)} - 3\psi_{ik}^{(\Delta)})$$





$$M_{10}^{(D)} = \frac{3EI_1}{5} \cdot 0,0084 = \frac{3 \cdot 7,869EI_2}{5} \cdot 0,0084 = 0,03966EI_2$$

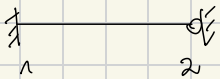
$$M_{01}^{(D)} = 0$$



$$M_{11}^{(D)} = \frac{2EI_2}{3} \cdot 2 \cdot 0,03491 = 0,04655EI_2$$

$$M_{12}^{(D)} = 0,02327EI_2$$

$$M_{21}^{(D)} = 0$$



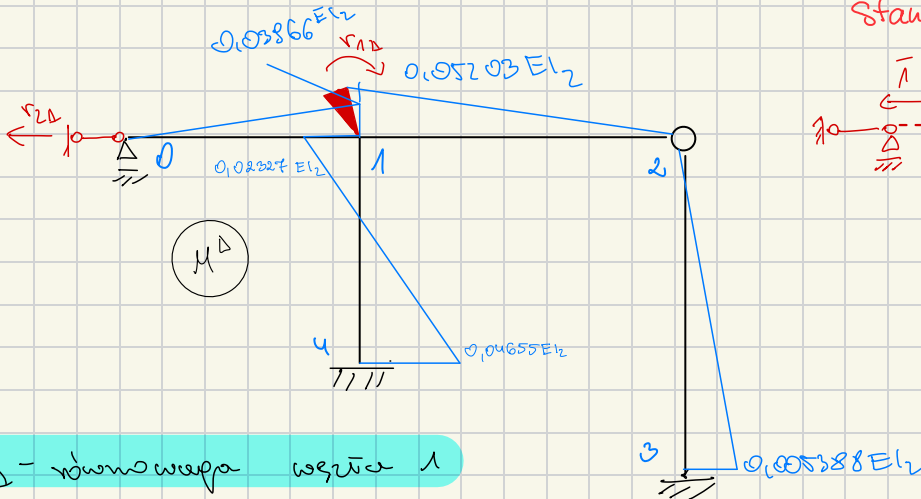
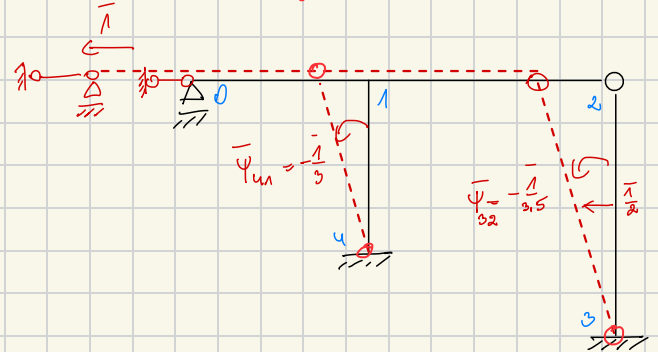
$$M_{12}^{(D)} = \frac{3 \cdot 7,869EI_2}{3,5} (-0,00773) = -0,05203EI_2$$



$$M_{23}^{(D)} = 0$$

$$M_{32}^{(D)} = \frac{3 \cdot EI_2}{3,5} \cdot 0,006286 = 0,005388EI_2$$

stan wirtualny do RPW (do  $r_{2D}$ )



$r_{1D}$  - równowaga węzła 1

$$\sum M = 0$$

$$r_{1D} + 0,05203EI_2 - 0,02327EI_2 - 0,03966EI_2 = 0$$

$$r_{1D} = 0,0109EI_2$$

$r_{2D}$  - równanie pręci wirtualnych

$$r_{2D} \cdot \bar{1} + \sum M_{ik}^{(D)} \cdot \bar{\psi}_{ik} = 0$$

$$r_{2D} \cdot \bar{1} - 0,02327 \cdot \frac{\bar{1}}{3} - 0,04655 \cdot \frac{\bar{1}}{3} - 0,005388 \cdot \frac{\bar{1}}{3,5} = 0$$

$$r_{2D} = 0,02481EI_2$$

## wyznaczenie niewiadomych $\varphi_1$ i $u_2$

$$\begin{cases} 13,208 EI \varphi_1 + 0,6667 EI u_2 + 0,0109 EI = 0 \\ 0,6667 EI \varphi_1 + 0,5144 EI u_2 + 0,0248 EI = 0 \end{cases}$$

$$I_2 = 2492 \text{ cm}^4$$

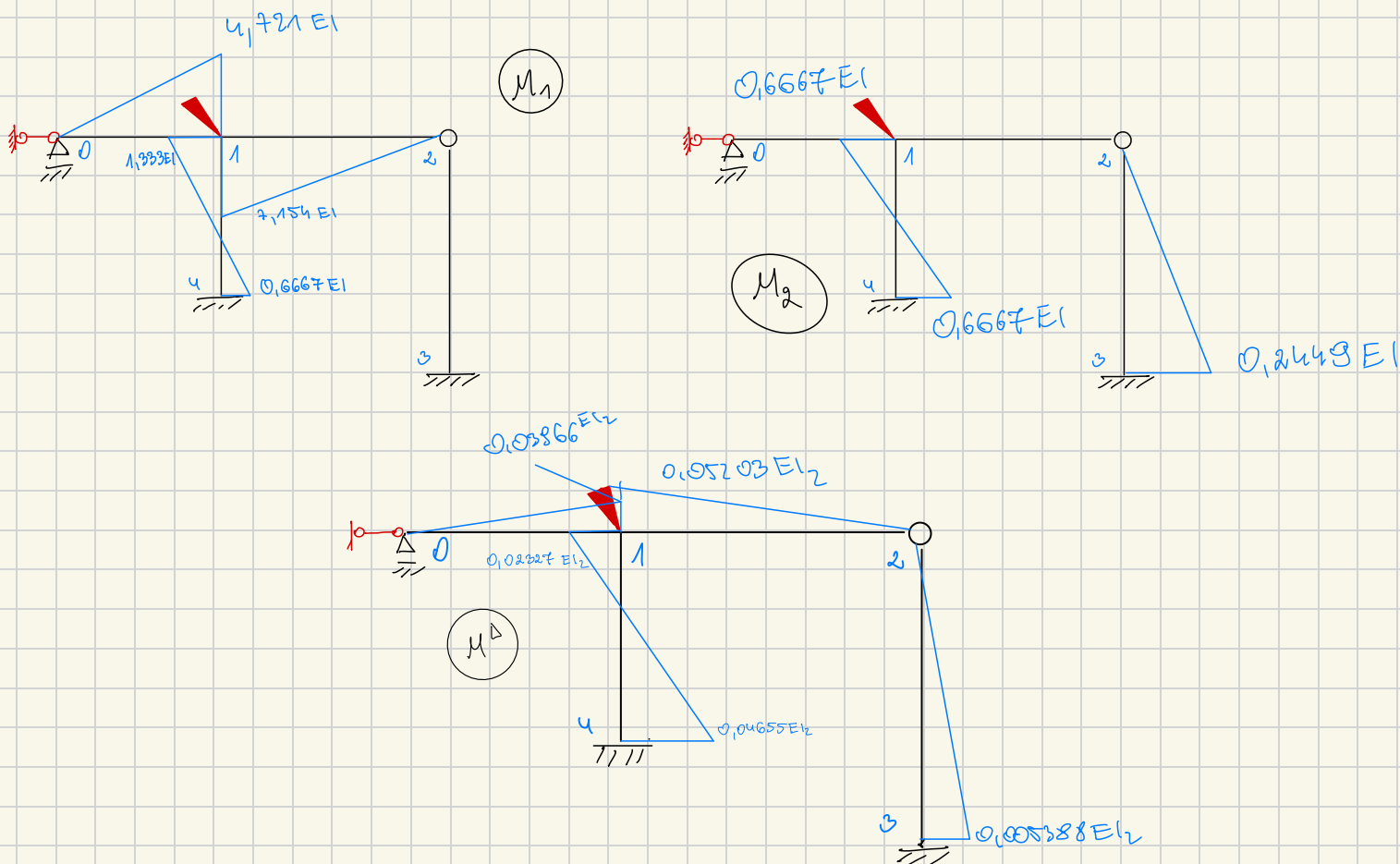
$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$EI = 2,1 \cdot 2492 = 5233,2 \text{ kNm}^2$$

$$\begin{cases} 13,208 EI \varphi_1 + 0,6667 EI u_2 + 0,0109 \cdot 5233 = 0 \\ 0,6667 EI \varphi_1 + 0,5144 EI u_2 + 0,0248 \cdot 5233 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{9,011}{EI} \\ u_2 = -\frac{264,07}{EI} \end{cases}$$

## wyznaczenie rozkładu momentów zginających

$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(3)}$$



$$M_{01}^N = 0$$

$$M_{10}^N = 4,721 EI \cdot \frac{8,011}{EI} + 0,03866 \cdot 5233 = 250,1 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^N = 7,154 EI \cdot \frac{8,011}{EI} - 0,05203 \cdot 5233 = -207,8 \text{ kNm}$$

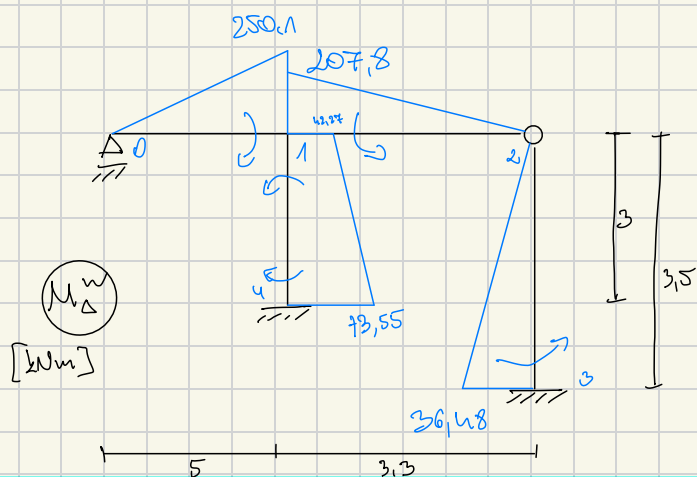
$$M_{21}^N = 0$$

$$M_{14}^N = 1,333 EI \cdot \frac{8,011}{EI} + 0,6667 EI \cdot \left(-\frac{264,07}{EI}\right) + 0,02327 \cdot 5233 = -42,27 \text{ kNm}$$

$$M_{41}^N = 0,6667 EI \cdot \frac{8,011}{EI} + 0,6667 EI \cdot \left(-\frac{264,07}{EI}\right) + 0,04655 \cdot 5233 = 73,55 \text{ kNm}$$

$$M_{23}^N = 0$$

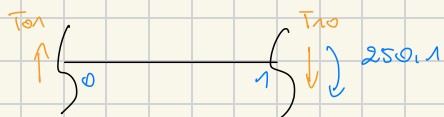
$$M_{32}^N = 0,2448 \cdot \left(-\frac{264,07}{EI}\right) + 0,005388 \cdot 5233 = -36,48 \text{ kNm}$$



równowaga węzła 1

$$-250,1 + 42,27 + 207,8 = -0,03 \approx 0$$

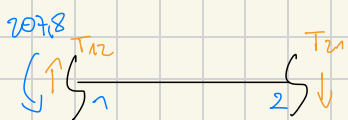
wyznaczenie reakcji z użyciem poprzecznych



$$\sum M_0 = 0$$

$$T_{10} \cdot 5 + 250,1 = 0$$

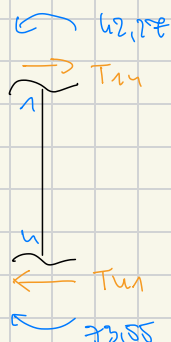
$$T_{01} = T_{10} = -50,02 \text{ kN}$$



$$\sum M_1 = 0$$

$$T_{21} \cdot 3,3 - 207,8 = 0$$

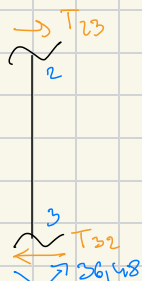
$$T_{12} = T_{21} = 62,97 \text{ kN}$$



$$\sum M_4 = 0$$

$$T_{14} \cdot 3 - 42,27 + 73,55 = 0$$

$$T_{41} = T_{14} = -10,43 \text{ kN}$$

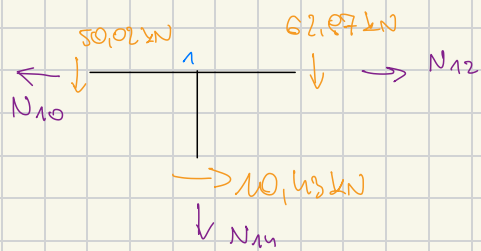


$$\sum M_3 = 0$$

$$T_{23} \cdot 3,5 - 36,48 = 0$$

$$T_{32} = T_{23} = 10,42 \text{ kN}$$

# wyznaczenie sił wewnętrznych



$$\sum X = 0$$

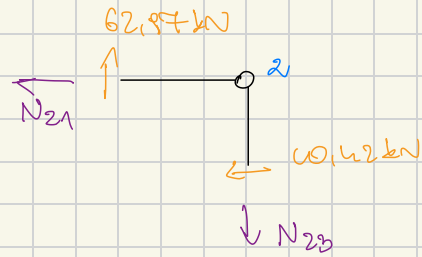
$$-N_{10} + N_{12} + 10,43 = 0$$

$$N_{10} = 0,01 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$-50,02 - N_{14} - 62,97 = 0$$

$$N_{14} = -113 \text{ kN}$$

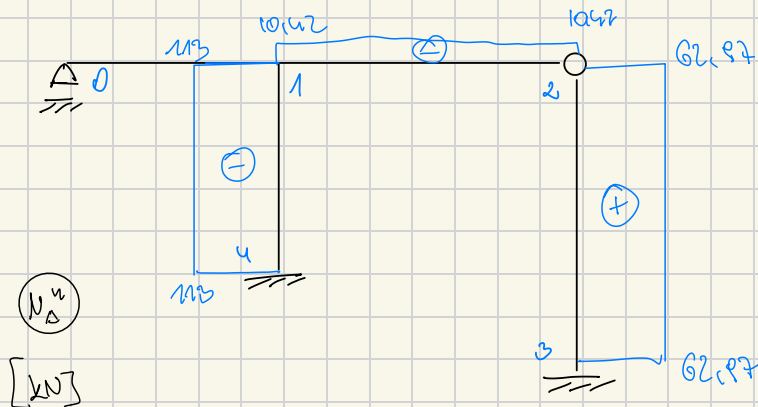
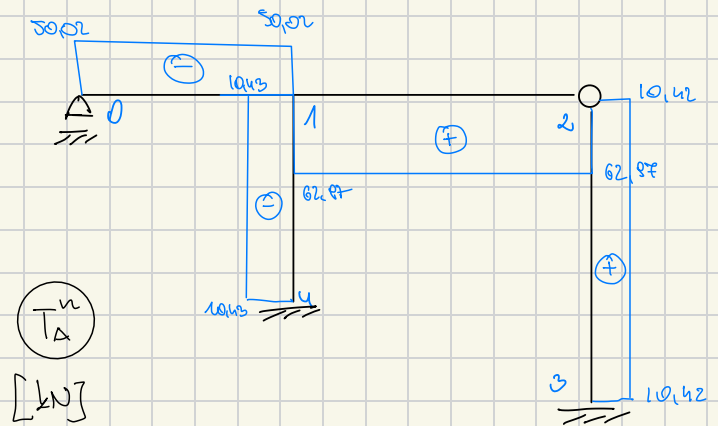
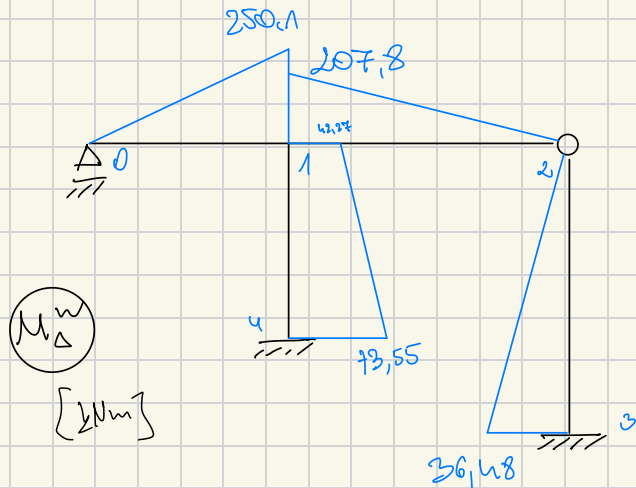


$$\sum X = 0$$

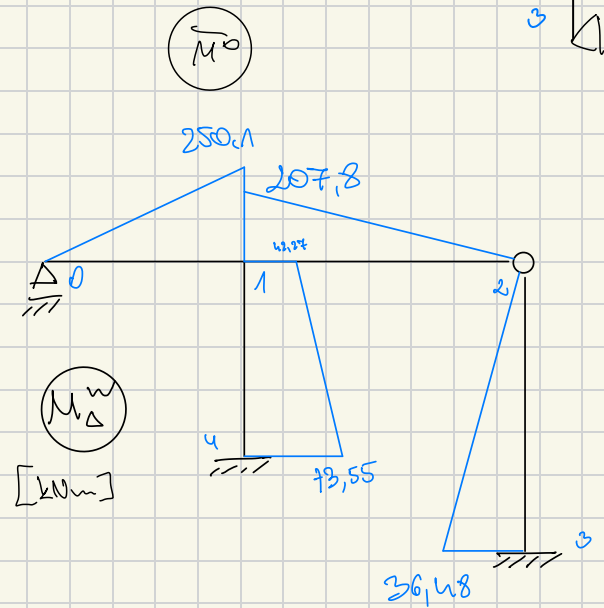
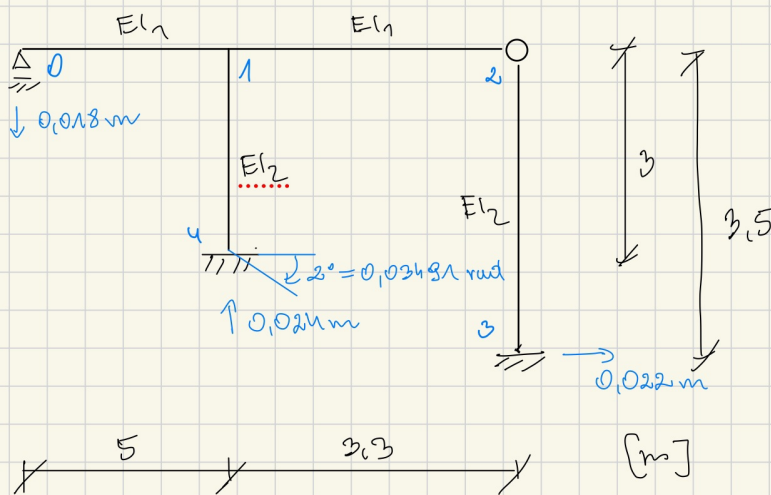
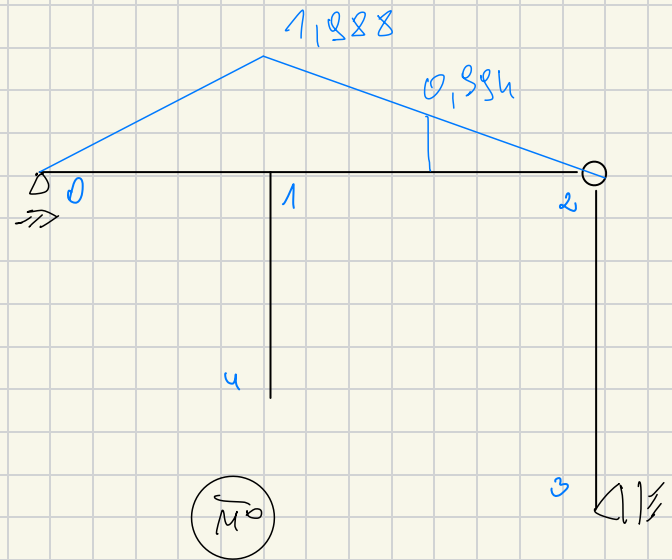
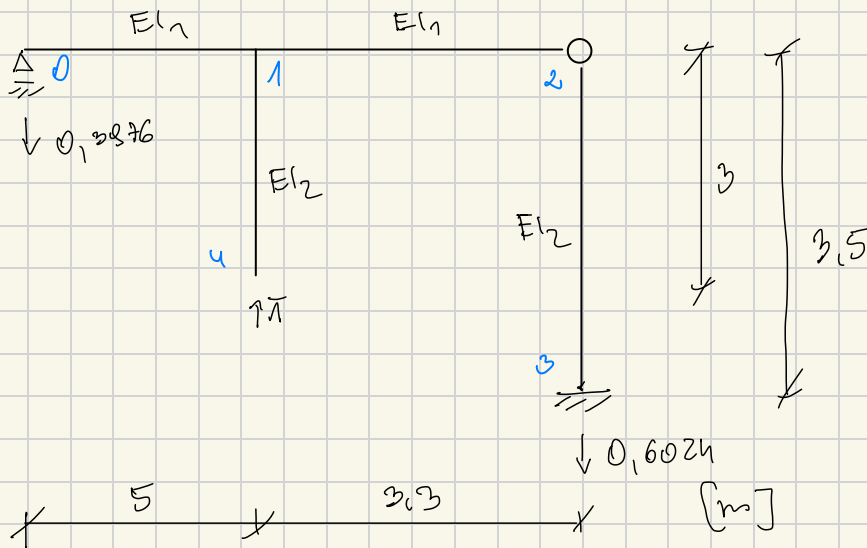
$$N_{21} = -10,42 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$N_{23} = 62,97 \text{ kN}$$



# Kontrola kinematyczna - sprawdzenie przemieszczenia pionowego w węźle 4



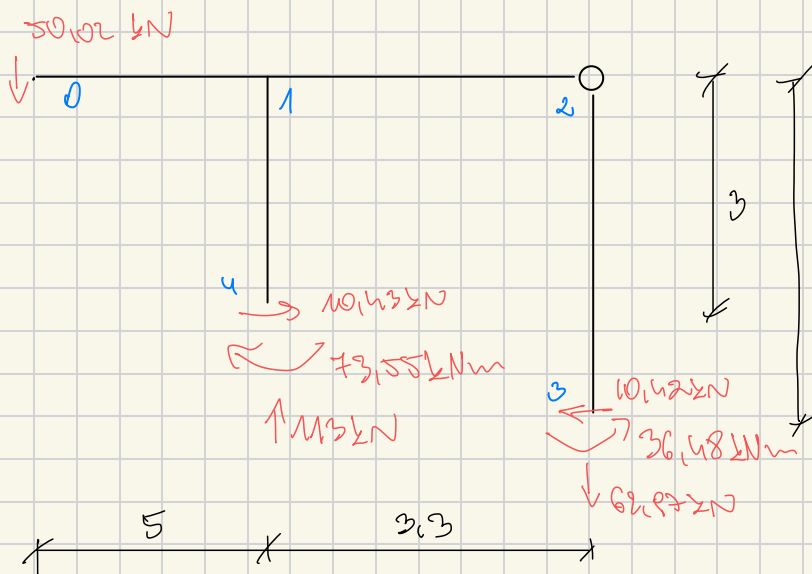
$$I_1 = 19610 \text{ cm}^4$$

$$V_0 = \int \frac{M_{\Delta}^u \cdot \bar{M}^0}{EI} dx - \int \bar{R}^0 \cdot \Delta$$

$$V_0 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1.988 \cdot \frac{2}{3} \cdot 250.1 + \frac{1}{2} \cdot 3.3 \cdot 1.988 \cdot \frac{2}{3} \cdot 207.8 \right] - (0.018 \cdot 0.994 + 0.022 \cdot 1)$$

$$= \frac{12831.08}{41181} - 0.03116 = 0.03116 - 0.03116 = 0$$

# spewdzenie statyczne



$$\sum \mathcal{E}_x = 0$$

$$10.43 - 10.42 = 0.01 \approx 0$$

$$\sum \mathcal{E}_y = 0$$

$$-50.02 + 11.5 - 62.87 \approx 0$$

$$0.01 \approx 0$$

$$\sum \mathcal{M}_2 = 0$$

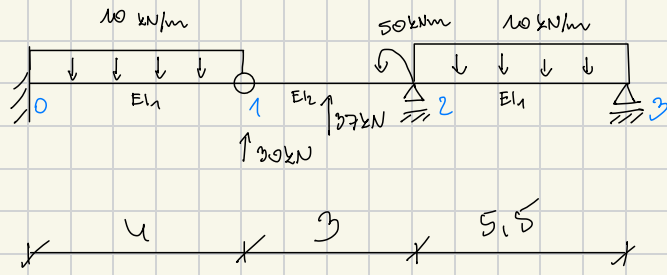
$$-50.02 \cdot 2.3 - 10.43 \cdot 3 + 73.55 + 11.5 \cdot 3.3$$

$$+ 10.42 \cdot 3.5 - 36.48 \approx 0$$

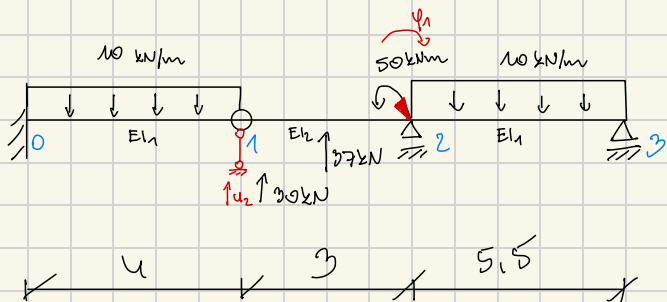
$$-0.016 \approx 0$$

# Belka

schemat 3



układ podstawowy



$$\epsilon_{\varphi} = 1$$

$$\epsilon_u = 1$$

$$SGN = 1 + 1 = 2$$

Schemat 3



Politechnika Poznańska  
Wydział Inżynierii Lądowej i Transportu  
Instytut Analizy Konstrukcji  
Zakład Mechaniki Budowli

Nazwisko i imię studenta: **Gocki Maksymilian**  
Nr albumu: **159862**  
Rok akademicki: **2024/25 BS-1**  
Grupa / Grupa projektowa: **C3 / L5**

## DANE DLA RAMY Nr schematu: 4

Wymiary i obciążenie przęsłowe:

| Pręt | L [m] | Przekrój | q [kN/m] | P [kN] | M [kNm] |
|------|-------|----------|----------|--------|---------|
| 1    | 5     | 1360     | 0        | 0      | 0       |
| 2    | 3,3   | 1360     | 0        | -34    | 0       |
| 3    | 3     | 1160 HEB | 0        | 0      | -33     |
| 4    | 3,5   | 1160 HEB | -10      | 0      | 0       |

Obciążenie węzłowe:

|                                 |         |
|---------------------------------|---------|
| siła skupiona pionowa w węźle 1 | 20 kN   |
| moment skupiony w węźle 1       | -25 kNm |

Osiadanie podpór:

| Kierunek osiadania | Nr węzła | Wartość |
|--------------------|----------|---------|
| kątowe [°]         | 4        | 2       |
| pionowe [cm]       | 4        | -2,4    |
| pionowe [cm]       | 0        | 1,8     |
| poziome [cm]       | 3        | 2,2     |

## DANE DLA BELKI Nr schematu: 3

Wymiary i obciążenie przęsłowe:

| Pręt | L [m] | Przekrój | q [kN/m] | P [kN] |
|------|-------|----------|----------|--------|
| 1    | 4     | 1400 HEB | 10       | 0      |
| 2    | 3     | 1270 PE  | 0        | -37    |
| 3    | 5,5   | 1400 HEB | 10       | 0      |

Obciążenie węzłowe:

|                                 |         |
|---------------------------------|---------|
| siła skupiona pionowa w węźle 1 | -30 kN  |
| moment skupiony w węźle 2       | -50 kNm |

## LEGENDA

Obciążenie przęsłowe:

- obciążenie równomiernie rozłożone  $q$  działa na całej długości pręta, prostopadle do osi pręta;
- siła  $P$  prostopadła do osi pręta, przyłożona w połowie długości pręta;
- moment skupiony  $M$  przyłożony w połowie długości pręta.

Obciążenie przęsłowe i węzłowe – zwroty:

- siły skupione, obciążenie równomiernie rozłożone oraz liniowe osiadania podpór – wartość dodatnia oznacza zwrot zgodny z osią układu współrzędnych, który jest zaznaczony na schemacie, ujemna – przeciwny;
- momenty skupione oraz osiadania kątowe – wartość dodatnia oznacza zwrot w prawo, ujemna – w lewo.

Schemat 4

- dla prętów 1 i 3: I 400 HEB

$$I_1 = 57680 \text{ cm}^4$$

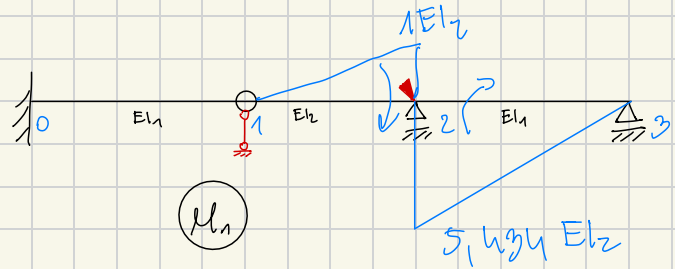
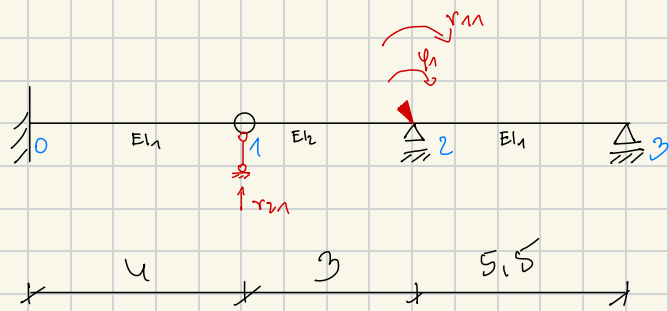
- dla pręta 2: I 270 PE

$$I_2 = 5790 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{57680}{5790} = 9,962 \quad I_1 = 9,962 I_2$$

$$\begin{cases} r_{11} \cdot \varphi_1 + r_{12} \cdot u_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21} \cdot \varphi_1 + r_{22} \cdot u_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

stan  $\varphi_1 = 1$



$$M_{01}^{(1)} = 0 = M_{10}^{(1)}$$

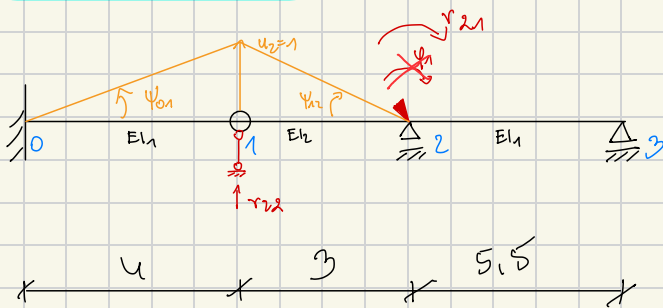
$$M_{12}^{(1)} = 0$$

$$M_{21}^{(1)} = \frac{3 \cdot EI_2}{3} = 1EI_2$$

$$M_{23}^{(1)} = \frac{3 \cdot EI_1}{5.5} = \frac{3 \cdot 9.862 EI_2}{5.5} = 5.434 EI_2$$

$$M_{32}^{(1)} = 0$$

stan  $u_2 = 1$



$$\psi_{01} = -\frac{1}{4}$$

$$\psi_{12} = \frac{1}{3}$$

01: utwierdzenie - pręgi

$$M_{01}^{(2)} = -\frac{3EI_1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3 \cdot 9.862 EI_2}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1.868 EI_2$$

$$M_{10}^{(2)} = 0$$

12: utwierdzenie - pręgi

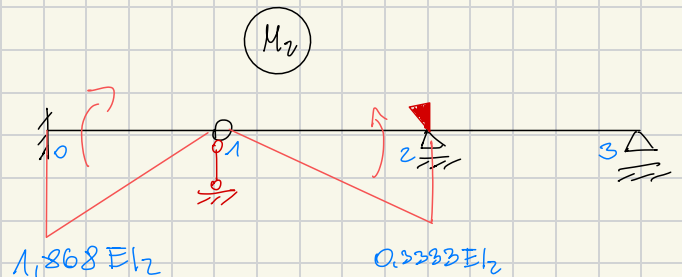
$$M_{21}^{(2)} = \frac{3EI_2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -0.3333 EI_2$$

$$M_{12}^{(2)} = 0$$

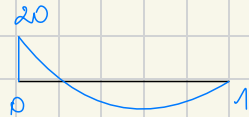
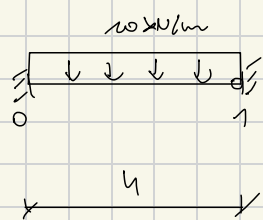
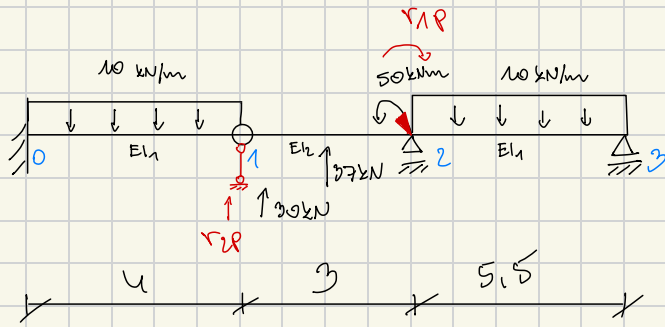
23: utwierdzenie - pręgi

$$M_{23}^{(2)} = 0$$

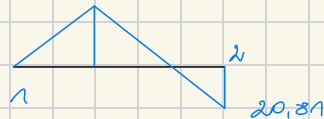
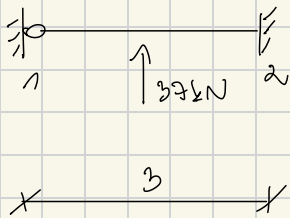
$$M_{32}^{(2)} = 0$$



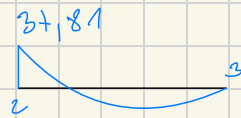
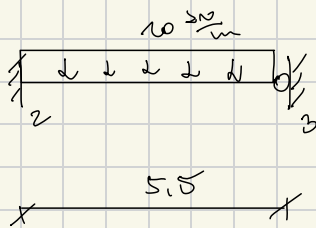
## step 1



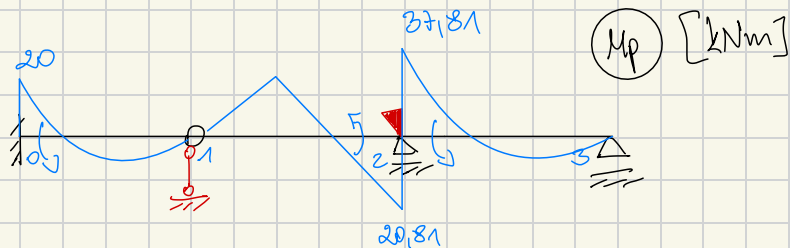
$$M = \frac{qL^2}{8} = \frac{10 \cdot 16}{8} = 20$$



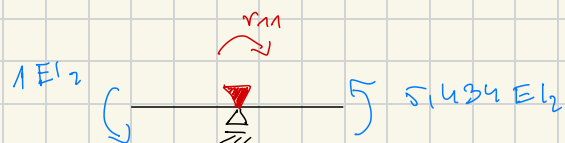
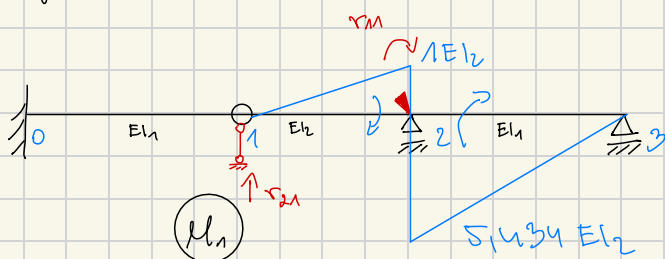
$$M = \frac{3 \cdot 37.81}{16} = \frac{3 \cdot 37.81}{16} = 20.81$$



$$M = \frac{qL^2}{8} = \frac{10 \cdot 5.5^2}{8} = 37.81$$

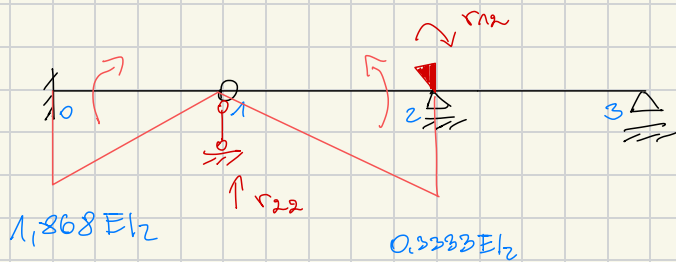


## вычисление r11 : r1p



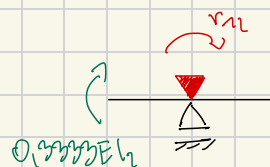
$$r_{11} = 6.434 EI_2$$

$M_2$



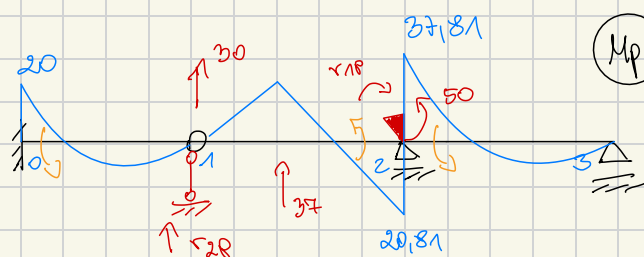
$$\psi_{01} = -\frac{1}{4}$$

$$\psi_{12} = \frac{1}{3}$$



$$r_{12} = -0.3333 EI_2$$

$M_p$

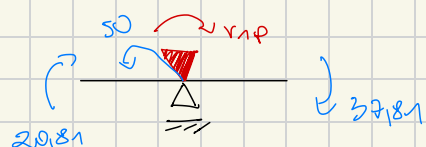


$$r_{21} \cdot 1 + 1 EI_2 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$r_{21} = -0.3333 EI_2$$

$$r_{22} \cdot 1 + 1.868 EI_2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 0.3333 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$r_{22} = 0.5781 EI_2$$



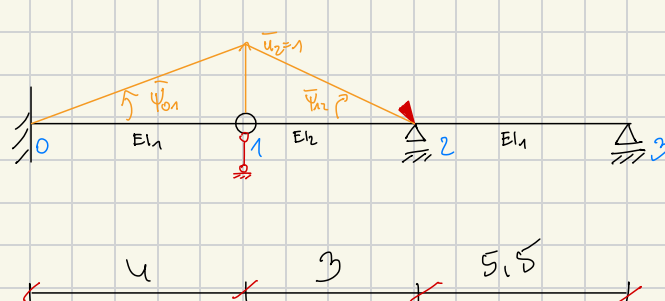
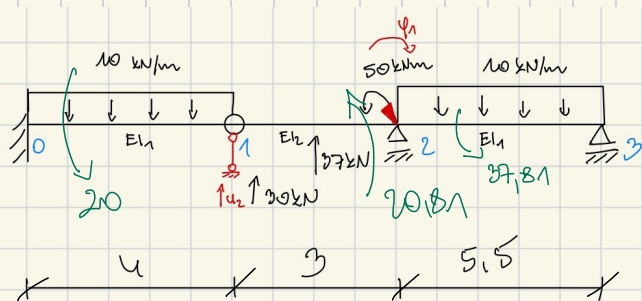
$$r_{22} \cdot 1 - 10 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 30 \cdot 1 + 37 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{4} - 20.81 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

$$r_{22} = -26.56 \text{ kNm}$$

$$r_{12} = -8.62 \text{ kNm}$$

macierzy sztywności

$$k = \begin{bmatrix} 6.434 EI_2 & -0.3333 EI_2 \\ -0.3333 EI_2 & 0.5781 EI_2 \end{bmatrix}$$



$$\psi_{01} = -\frac{1}{4}$$

$$\psi_{12} = \frac{1}{3}$$

wyznaczenie niewiadomych  $\varphi_1$  i  $u_2$

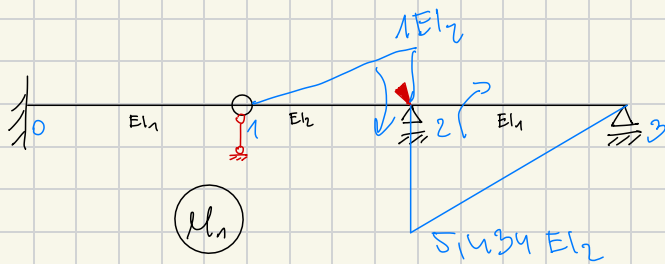
$$6,434 E I_2 \cdot \varphi_1 - 0,3333 E I_2 \cdot u_2 - 8,62 = 0$$

$$-0,3333 E I_2 \cdot \varphi_1 + 0,5781 E I_2 \cdot u_2 - 26,56 = 0$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{3,834}{E I_2} \\ u_2 = \frac{48,15}{E I_2} \end{cases}$$

wyznaczenie rozkładu momentów zginających

$$M_{1k}^w = M_{1k}^{(w)} \cdot \varphi_1 + M_{1k}^{(u)} \cdot u_2 + M_{1k}^{(p)}$$



$$M_{11}^w = 1,868 E I_2 \cdot \frac{48,15}{E I_2} - 20 = 68,84 \text{ kNm}$$

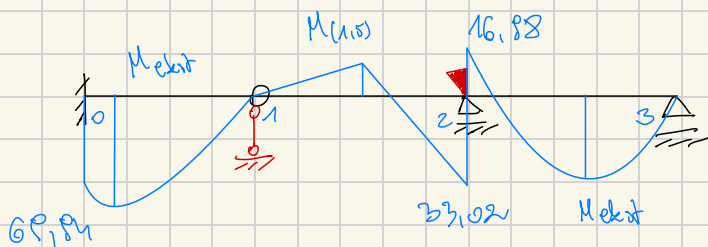
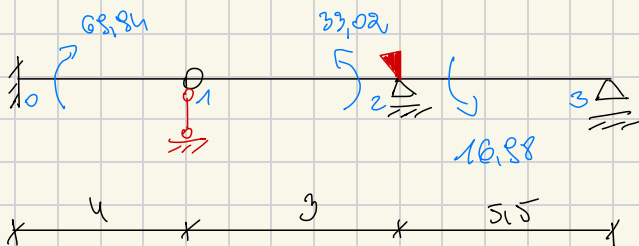
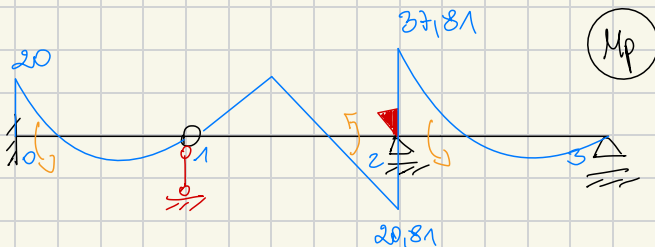
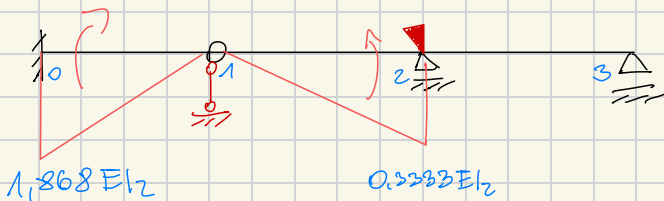
$$M_{12}^w = 0$$

$$M_{13}^w = 0$$

$$M_{21}^w = 1 E I_2 \cdot \frac{3,834}{E I_2} - 0,3333 E I_2 \cdot \frac{48,15}{E I_2} - 20,81 = -33,02 \text{ kNm}$$

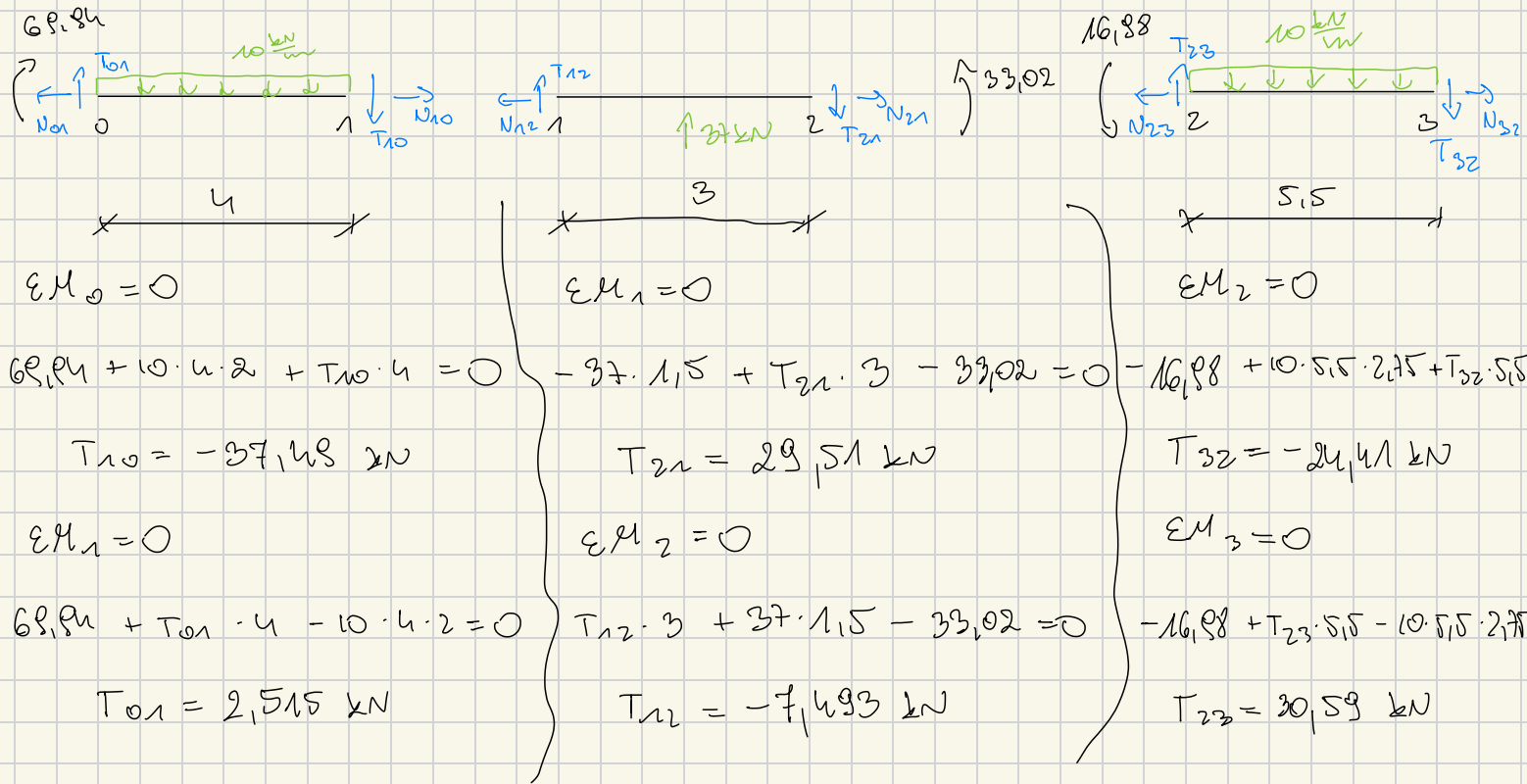
$$M_{22}^w = 5,434 E I_2 \cdot \frac{3,834}{E I_2} - 37,81 = -16,88 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^w = 0$$



$$\begin{matrix} \textcircled{M^w} \\ [\text{kNm}] \end{matrix}$$

wyznaczanie wartości sił poprzecznych



$$M(x) = 69,94 + T_{\text{an}} \cdot x - 10 \cdot x \cdot \frac{1}{2}x$$

$$\mu(x) = T_{12} \cdot x$$

$$M_{(x)} = -732 \cdot x - 10 \cdot x \cdot \frac{1}{2} x$$

$$M(x) = 69,94 + 2,515x - 5x^2$$

$$H(x) = -7,493 \cdot x$$

$$M(x) = 24,41x - 5x^2$$

$$U'(x) = -10x + 2,515$$

$$M_{(15)} = -11,24 \text{ kNm}$$

$$\mu'(x) = -10x + 24, u1$$

$$M^1(x) = 0$$

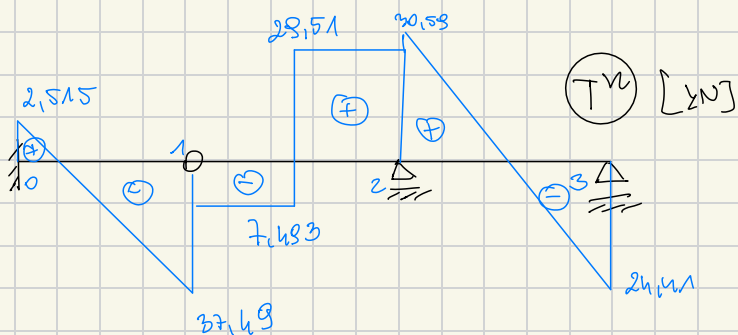
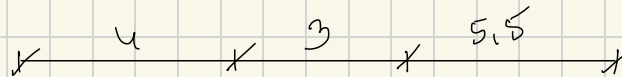
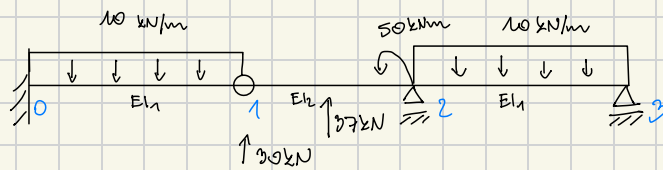
$$M'x_1 = 0$$

$$x = 0,2515$$

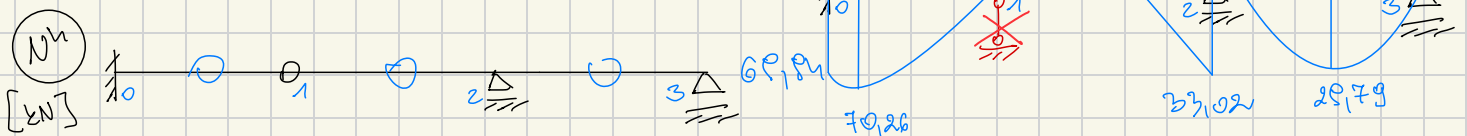
$$x = 2,441$$

Merkat = 70,26 L/m

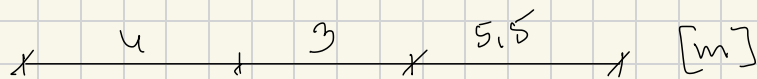
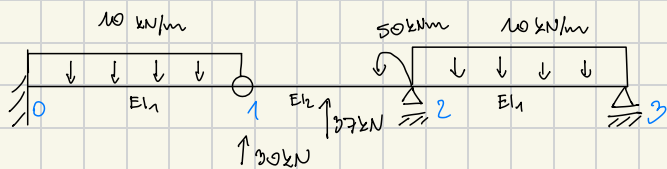
$$M_{\text{krit}} = 29,79 \text{ kNm}$$



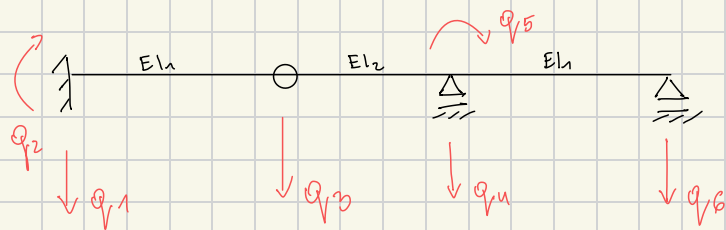
wykres do układu rezystancyjnego,  
a nie podstawowego  $M^n$  [kNm]



# Belka w ujęciu macierzowym



## niewiadome przemieszczenia węzłowe



## przekroje prętów

- dla prętów 1 i 3: I 400 HEB

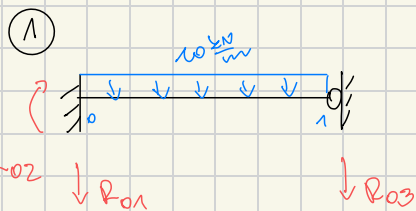
$$I_1 = 57680 \text{ cm}^4$$

- dla pręta 2: I 270 PE

$$I_2 = 5790 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{57680}{5790} = 9,962 \quad I_1 = 9,962 I_2$$

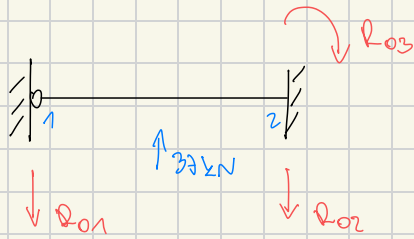
## pręty - elementy



$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^3} & \frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^2} & -\frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^3} \\ \frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^2} & \frac{3 \cdot 9,962 EI}{L} & -\frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^2} \\ -\frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^3} & -\frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^2} & \frac{3 \cdot 9,962 EI}{L^3} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,4670 & 1,868 & -0,4670 \\ 1,868 & 7,472 & -1,868 \\ -0,4670 & -1,868 & 0,4670 \end{bmatrix}$$

$$R_{01} = \begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \\ R_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5qL}{8} \\ -\frac{qL^2}{8} \\ -\frac{3qL}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -20 \\ -15 \end{bmatrix}$$

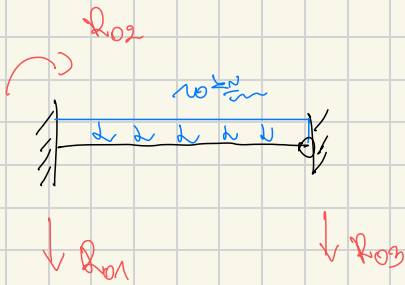
②



$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^2} & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,1111 & -0,1111 & 0,3333 \\ -0,1111 & 0,1111 & -0,3333 \\ 0,3333 & -0,3333 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{02} = \begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \\ R_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5P}{16} \\ -\frac{11P}{16} \\ -\frac{3PL}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,56 \\ 25,44 \\ -20,81 \end{bmatrix}$$

③



$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot 9,862EI}{L^3} & \frac{3 \cdot 9,862EI}{L^2} & -\frac{3 \cdot 9,862EI}{L^3} \\ \frac{3 \cdot 9,862EI}{L^2} & \frac{3 \cdot 9,862EI}{L} & -\frac{3 \cdot 9,862EI}{L^3} \\ -\frac{3 \cdot 9,862EI}{L^3} & -\frac{3 \cdot 9,862EI}{L^2} & \frac{3 \cdot 9,862EI}{L^3} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,1786 & 0,9880 & -0,1786 \\ 0,9880 & 5,434 & -0,9880 \\ -0,1786 & -0,9880 & 0,1786 \end{bmatrix}$$

$$R_{03} = \begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \\ R_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34,38 \\ -37,81 \\ -20,63 \end{bmatrix}$$

## Tablica przemieszeń

| numer elementu | numery przemieszeń |   |   |   |
|----------------|--------------------|---|---|---|
|                | 1                  | 2 | 3 | 4 |
| 1              | 1                  | 2 | 3 | — |
| 2              | 3                  | 4 | 5 | — |
| 3              | 4                  | 5 | 6 | — |

## Agregacja macierzy sztywności

$$K_1 = EI \begin{bmatrix} \overset{1}{0,4670} & \overset{2}{1,868} & \overset{3}{-0,4670} \\ 1,868 & 7,472 & -1,868 \\ -0,4670 & -1,868 & 0,4670 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$K_2 = EI \begin{bmatrix} \overset{3}{0,1111} & \overset{4}{-0,1111} & \overset{5}{0,3333} \\ -0,1111 & 0,1111 & -0,3333 \\ \overset{4}{0,3333} & \overset{5}{-0,3333} & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$K_3 = EI \begin{bmatrix} \overset{4}{0,1786} & \overset{5}{0,8880} & \overset{6}{-0,1786} \\ 0,8880 & 5,434 & -0,8880 \\ -0,1786 & -0,8880 & 0,1786 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$K = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,4670 & 1,868 & -0,4670 & 0 & 0 & 0 \\ 1,868 & 7,472 & -1,868 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4670 & -1,868 & 0,4670 + 0,1111 & -0,1111 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1111 & 0,1111 + 0,1786 & -0,3333 + 0,9880 & -0,1786 \\ 0 & 0 & 0,3333 & -0,3333 + 0,9880 & 1 + 5,434 & -0,9880 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1786 & -0,9880 & 0,1786 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$K = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0,4670 & 1,868 & -0,4670 & 0 & 0 & 0 \\ 1,868 & 7,472 & -1,868 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4670 & -1,868 & 0,5781 & -0,1111 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1111 & 0,2907 & 0,6547 & -0,1786 \\ 0 & 0 & 0,3333 & 0,6547 & 6,434 & -0,9880 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1786 & -0,9880 & 0,1786 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Agregacja wektorowa reakcji:

$$R_{01} = \begin{bmatrix} -25 \\ -20 \\ -15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

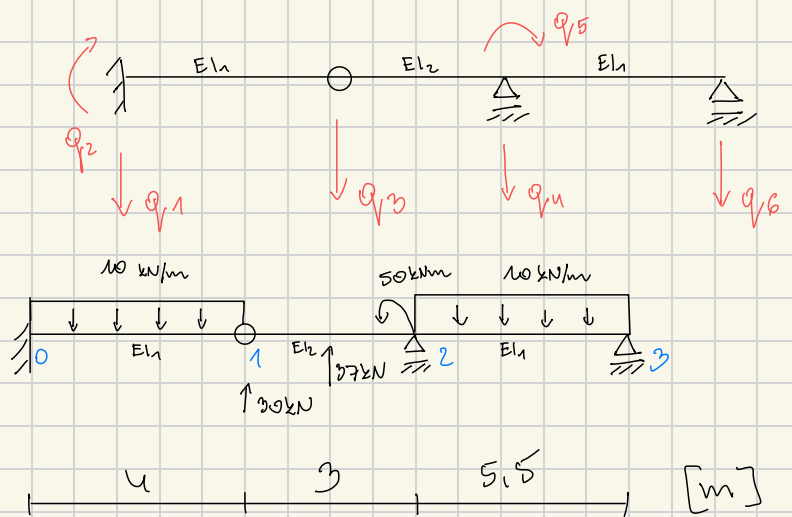
$$R_{02} = \begin{bmatrix} 11,56 \\ 25,44 \\ -20,81 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$R_{03} = \begin{bmatrix} -34,38 \\ -37,81 \\ -20,63 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -25 \\ -20 \\ -15 + 11,56 \\ +25,44 - 34,38 \\ -20,81 - 37,81 \\ -20,63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -20 \\ -3,44 \\ -8,94 \\ -58,62 \\ -20,63 \end{bmatrix}$$

## wektor sił węzłowych

$$P_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Uwzględnienie warunków brzegowych

zerowe przemieszczenia węzłowe:  $q_1 = 0, q_2 = 0, q_4 = 0, q_6 = 0$

$$k = EI \begin{bmatrix} 0,4670 & 1,868 & -0,4670 & 0 & 0 & 0 \\ 1,868 & 7,472 & -1,868 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4670 & -1,868 & 0,5781 & -0,1111 & 0,3333 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1111 & 0,2807 & 0,6547 & -0,1786 \\ 0 & 0 & 0,3333 & 0,6547 & 6,434 & -0,3880 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1786 & -0,3880 & 0,1786 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -25 \\ -20 \\ -3,44 \\ -8,84 \\ -58,62 \\ -20,63 \end{bmatrix}$$

$$P_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \\ -50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{red} = \begin{bmatrix} 0,5781 & 0,3333 \\ 0,3333 & 6,434 \end{bmatrix}$$

$$Q_{red} = \begin{bmatrix} -3,44 \\ -58,62 \end{bmatrix}$$

$$P_{w\ red} = \begin{bmatrix} -30 \\ -50 \end{bmatrix}$$

## rownienie równowagi

$$K_{red} \cdot q_{red} = P_{w, red} - P_{red}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5781 & 0,3333 \\ 0,3333 & 6,434 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3,44 \\ -58,62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,5781 & 0,3333 \\ 0,3333 & 6,434 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26,56 \\ 8,62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_3 \\ q_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -48,18 \\ 3,881 \end{bmatrix}$$

## porównanie wyników

|                  | wersja met. prem.                           |                                        |
|------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------|
|                  | klasyczna                                   | macierzowa                             |
| prem.<br>pionowe | $u_2 = \frac{48,18}{EI}$<br>(w górze)       | $q_3 = -\frac{48,18}{EI}$<br>(w górze) |
| obrot            | $\varphi_1 = \frac{3,881}{EI}$<br>(w prawo) | $q_5 = \frac{3,881}{EI}$<br>(w prawo)  |

## wektory przemieszczeń dla elementów

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -48,18 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -48,18 \\ 0 \\ 3,881 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = \begin{bmatrix} p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 3,881 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## wektory końcowych reakcji: węzłowych

$$R_1 = K_1 \cdot \varphi_1 + R_{01} = EI \begin{bmatrix} 0,4670 & 1,868 & -0,4670 \\ 1,868 & 7,472 & -1,868 \\ -0,4670 & -1,868 & 0,4670 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -48,18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25 \\ -20 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,485 \\ 70,02 \\ -37,50 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = K_2 \varphi_2 + R_{02} = EI \begin{bmatrix} 0,1111 & -0,1111 & 0,3333 \\ -0,1111 & 0,1111 & -0,3333 \\ 0,3333 & -0,3333 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} -48,18 \\ 0 \\ 3,881 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11,56 \\ 25,44 \\ -20,81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,503 \\ 28,50 \\ -32,88 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = K_3 \varphi_3 + R_{03} = EI \begin{bmatrix} 0,1786 & 0,9880 & -0,1786 \\ 0,9880 & 5,434 & -0,9880 \\ -0,1786 & -0,9880 & 0,1786 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 3,881 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -34,38 \\ -37,81 \\ -20,63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,54 \\ -16,67 \\ -24,47 \end{bmatrix}$$

## wartości sił wewnętrznych na końcach przęseł

