

MECHANIKA BUDOWLI / SEM.4 / ĆWICZENIE NR 1

METODA PRZEMIESZCZEŃ

Termin oddania: 29.04.2025

Data	Uwagi sprawdzającego	Podpis

~~ opracowanie: mgr inż. Anita Kaczor ~~ <https://anita.kaczor.pracownik.put.poznan.pl> ~~

Dla zadanej **RAMY**: / **Nr schematu: 10**

1. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.
2. Sprawdzić naprężenia w obu grupach przekrojów I_1 i I_2 , porównać je z wartościami dopuszczalnymi naprężeń i sformułować wnioski (w przypadku niespełnienia warunku nośności, obliczeń nie trzeba powtarzać).
3. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego osiadania podpór, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.

Dla zadanej **BELKI**: / **Nr schematu: 2**

1. Korzystając z metody przemieszczeń obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia, wykonać kontrolę kinematyczną oraz statyczną.
2. Korzystając z metody przemieszczeń w ujęciu macierzowym obliczyć i narysować wykresy sił przekrojowych (M, T, N) od zadanego obciążenia.

W obliczeniach przyjąć: $E = 210 \text{ GPa}$, $f_y = 235 \text{ MPa}$.

DANE DLA RAMY

Nr schematu: **10**

Wymiary i obciążenie przęsłowe:

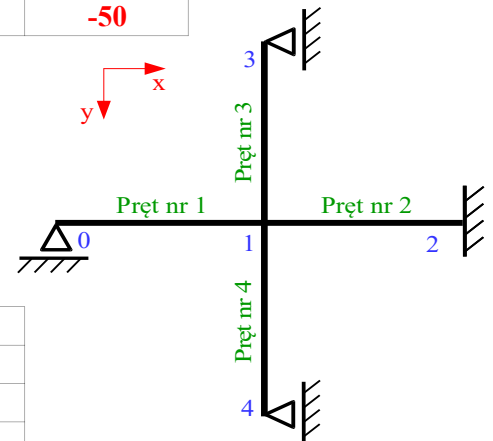
Pręt	L [m]	Przekrój	q [kN/m]	P [kN]	M [kNm]
1	4,5	I 340 HEA	0	0	0
2	4,5	I 340 HEA	-12	0	0
3	4	I 270 PE	0	46	0
4	3	I 270 PE	0	0	-50

Obciążenie węzłowe:

siła skupiona pozioma w węźle 0	15 kN
moment skupiony w węźle 1	-20 kNm

Osiadanie podpór:

Kierunek osiadania	Nr węzła	Wartość
kątowe [°]	2	-2,4
pionowe [cm]	2	-1,5
pionowe [cm]	0	2,6
poziome [cm]	4	1,6



DANE DLA BELKI

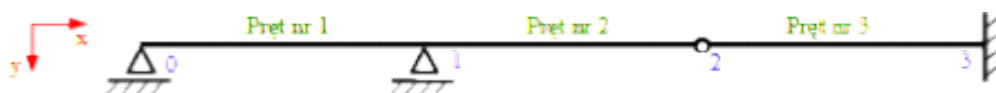
Nr schematu: **2**

Wymiary i obciążenie przęsłowe:

Pręt	L [m]	Przekrój	q [kN/m]	P [kN]
1	4	I 280 HEB	0	40
2	3	I 280 HEB	14	0
3	4,5	I 400 HEB	0	-29

Obciążenie węzłowe:

siła skupiona pionowa w węźle 2	-10 kN
moment skupiony w węźle 1	25 kNm



LEGENDA

Obciążenie przęsłowe:

- obciążenie równomiernie rozłożone q działa na całej długości pręta, prostopadłe do osi pręta;
- siła P prostopadła do osi pręta, przyłożona w połowie długości pręta;
- moment skupiony M przyłożony w połowie długości pręta.

Obciążenie przęsłowe i węzłowe – zwroty:

- siły skupione, obciążenie równomiernie rozłożone oraz liniowe osiadania podpór – wartość dodatnia oznacza zwrot zgodny z osią układu współrzędnych, który jest zaznaczony na schemacie, ujemna – przeciwny;
- momenty skupione oraz osiadania kątowe – wartość dodatnia oznacza zwrot w prawo, ujemna – w lewo.

Schemat 10

The diagram shows a frame structure with four members meeting at a central node. The members are labeled as follows:

- Pręt nr 1**: Horizontal member extending to the left, fixed at node 0.
- Pręt nr 2**: Horizontal member extending to the right, fixed at node 2.
- Pręt nr 3**: Vertical member extending upwards, fixed at node 3.
- Pręt nr 4**: Vertical member extending downwards, fixed at node 4.

A coordinate system is defined with the x -axis pointing to the right and the y -axis pointing downwards.

$$J_A (1340 \text{ HEA}) = 27690 \text{ cm}^4$$

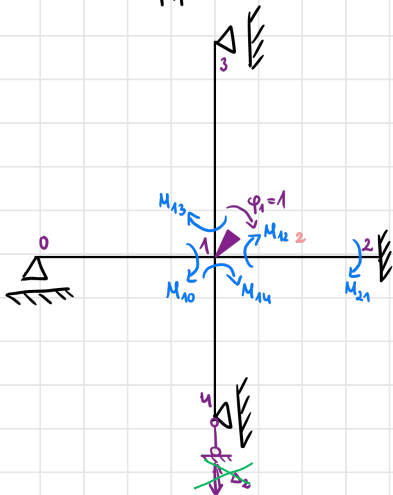
$$J_2(1270PE) = 5790 \text{ cm}^4$$

$$EJ_2 = EJ_0$$

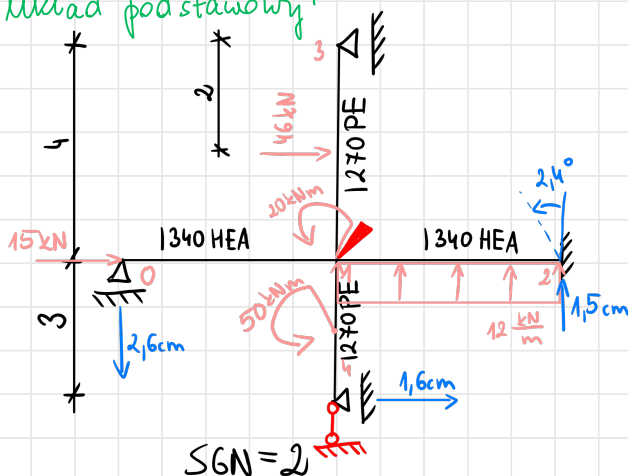
$$\frac{EJ_1}{EJ_2} = \frac{27690}{5790} = 4,7824$$

$$EJ_1 = 4,7824 EJ_0$$

$$\text{stan } \varphi_1 = 1$$



układ podstawowy:



URV.

$$\begin{cases} \Gamma_{11} \phi_1 + \Gamma_{12} \Delta_2 + \Gamma_{1P} = 0 \\ \Gamma_{12} \phi_1 + \Gamma_{22} \Delta_2 + \Gamma_{2P} = 0 \end{cases}$$

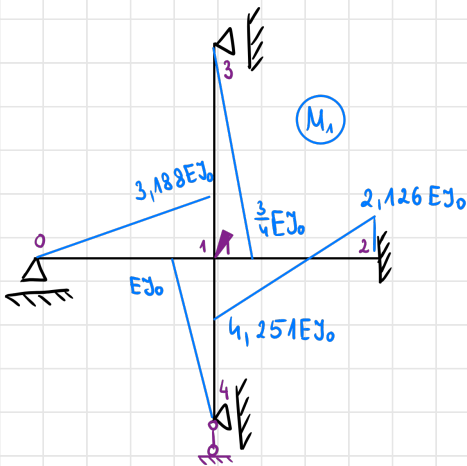
$$\mu_{10} = \frac{3EJ_1}{4,5} = \frac{3 \cdot 4,7824 EJ_0}{4,5} = 3,188 EJ_0$$

$$M_{12} = \frac{4EJ_1}{4,5} = \frac{4 \cdot 4,7824 EJ_0}{4,5} = 4,251 EJ_0$$

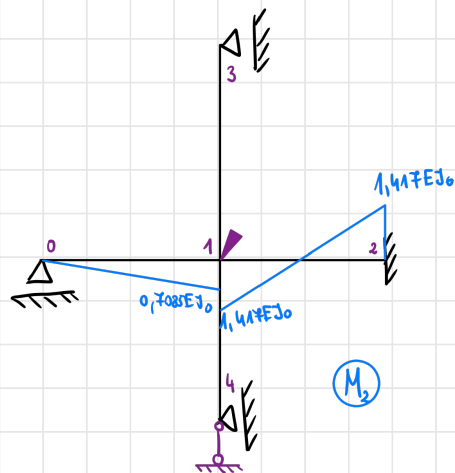
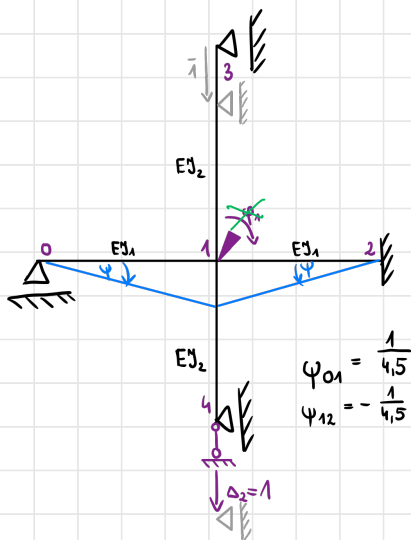
$$M_{2,1} = \frac{2EJ_1}{4,5} = \frac{2 \cdot 4,7824 EJ_0}{4,5} = 2,126 EJ_0$$

$$M_{14} = \frac{3EJ_2}{3} = EJ_0$$

$$M_{13} = \frac{3EY_2}{4} = \frac{3}{4} EY_0$$



$$\text{stan } \Delta_2 = 1$$

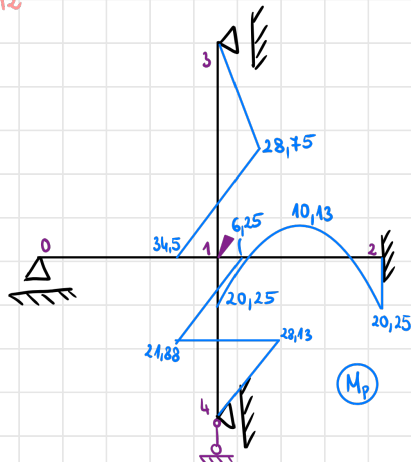
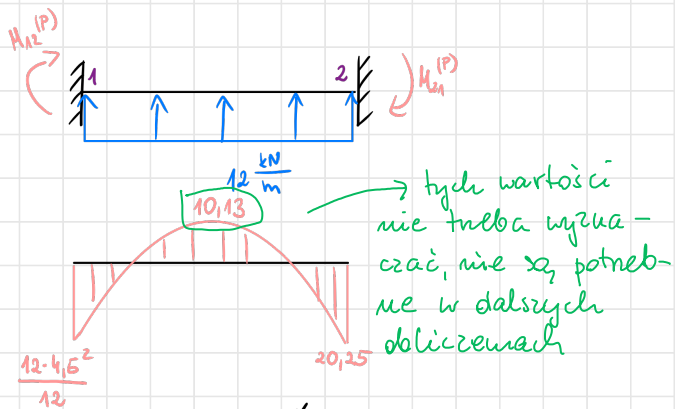
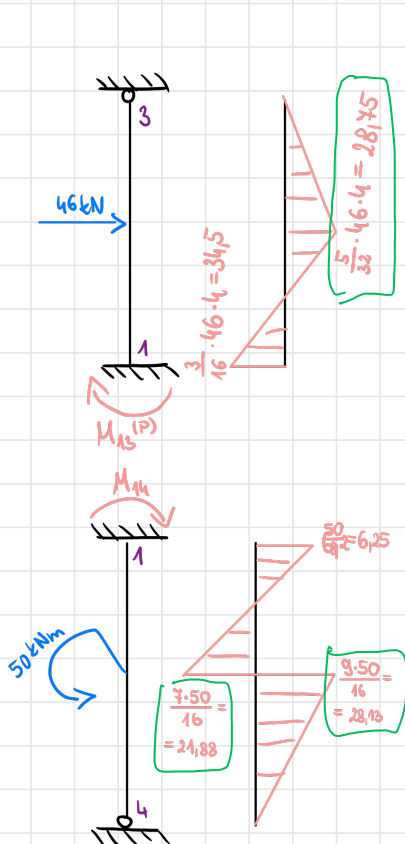
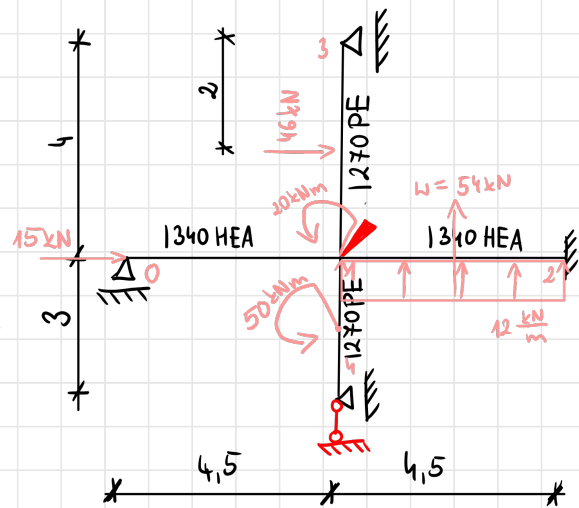


$$M_{21} = \frac{2EJ_1}{4,5} \left[-3 \cdot \left(-\frac{1}{4,5} \right) \right] = 0,2962 \cdot 4,7824 EJ_0 = 1,417 EJ_0$$

$$M_{12} = 1,417 EJ_0$$

$$M_{10} = \frac{3EJ_1}{4,5} \cdot \left(-\frac{1}{4,5} \right) = -0,7085 EJ_0$$

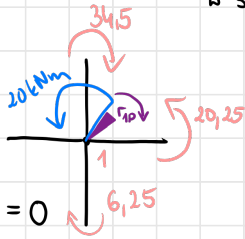
stan "P"



Wyznaczenie współczynników URK:

Wyznaczenie reakcji r_{1P} :

równowaga momentów w węźle 1
w stanie „P”



$$\sum M_1^{(P)} = 0$$

$$r_{1P} = -34,5 + 20,25 + 20 - 6,25 = 0$$

$$r_{1P} = -0,5 \text{ kNm}$$

Wyznaczenie reakcji r_{12} :

równowaga momentów w węźle 1
w stanie $\Delta_2 = 1$

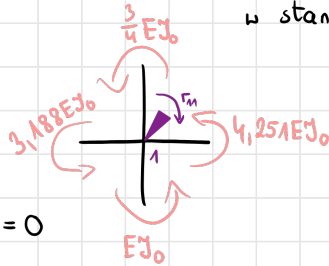


$$\sum M_1^{(2)} = 0$$

$$r_{12} = 1,417 EJ_0 - 0,7085 EJ_0 = 0,7085 EJ_0$$

Wyznaczenie reakcji r_{11} :

równowaga momentów w węźle 1
w stanie $\varphi_1 = 1$



$$\sum M_1^{(1)} = 0$$

$$r_{11} = \frac{3}{4} EJ_0 + 4,251 EJ_0 + EJ_0 + 3,188 EJ_0$$

$$r_{11} = 9,189 EJ_0$$

RPW

$$\sum_j R_j^{(1)} \bar{S} + \sum H_{ik}^{(1)} \cdot \psi_{ik} = 0$$

Wyznaczenie reakcji r_{2P} :

$$r_{2P} \cdot \bar{1} - 54 \cdot \frac{\bar{1}}{2} + (20,25 - 20,25) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,5}\right) = 0$$

$$r_{2P} = 27 \text{ kNm}$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + \left(3,188 EJ_0 \cdot \frac{\bar{1}}{4,5} + 4,251 EJ_0 \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,5}\right) + 2,126 EJ_0 \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,5}\right)\right) = 0$$

$$r_{21} = 0,7085 EJ_0$$

$$r_{22} \cdot \bar{1} + \left(-0,7085 EJ_0 \cdot \frac{\bar{1}}{4,5} + (1,417 EJ_0 + 1,417 EJ_0) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,5}\right)\right) = 0$$

$$r_{22} = 0,7872 EJ_0$$

macierz sztywności

$$K = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,189 EJ_0 & 0,7085 EJ_0 \\ 0,7085 EJ_0 & 0,7872 EJ_0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczenie niewiadomych φ_1 i Δ_2

$$\begin{cases} r_{11} \varphi_1 + r_{12} \Delta_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{12} \varphi_1 + r_{22} \Delta_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9,189 EJ_0 \varphi_1 + 0,7085 EJ_0 \Delta_2 - 0,5 = 0 \\ 0,7085 EJ_0 \varphi_1 + 0,7872 EJ_0 \Delta_2 + 27 = 0 \end{cases} \quad | : EJ_0$$

$$\begin{cases} 9,189 \varphi_1 + 0,7085 \Delta_2 = + \frac{0,5}{EJ_0} \\ 0,7085 \varphi_1 + 0,7872 \Delta_2 = - \frac{27}{EJ_0} \end{cases}$$

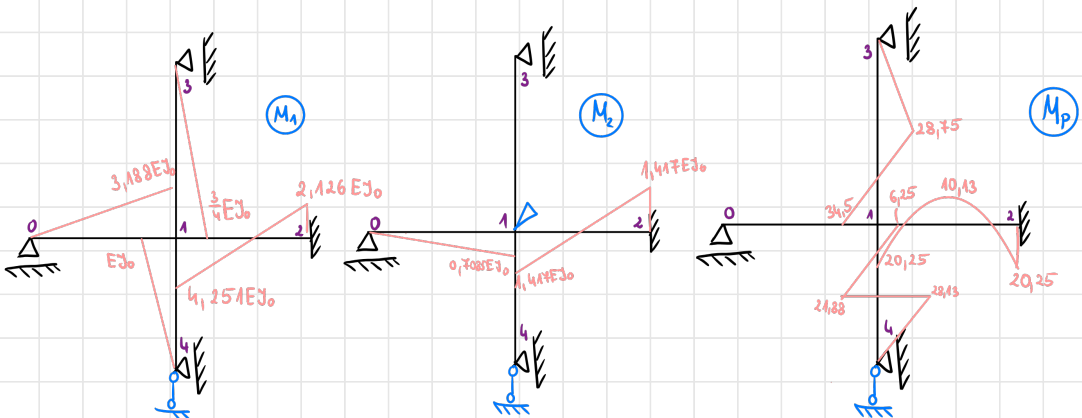
$$EJ_0 = 5790 \cdot 2,1 = 12159 \text{ kNm}^2$$

$$\varphi_1 = 0,0002385 \text{ rad} = \frac{2,900}{EJ_0} \text{ rad} \rightarrow \text{różnica} \left[\frac{\text{kNm}^2}{E} \right]$$

$$\Delta_2 = -0,003036 \text{ m} = - \frac{36,91}{EJ_0} \text{ m} \left[\frac{\text{kNm}^3}{E} \right]$$

Wyznaczenie rozkładu momentów zginających

$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot \Delta_2 + M_{ik}^{(P)}$$



$$M_{01}^n = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{10}^n = 3,188 EJ_0 \cdot \frac{2,9}{EJ_0} - 0,7085 EJ_0 \cdot \left(-\frac{36,91}{EJ_0}\right) = 35,40 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^n = 4,251 EJ_0 \cdot \frac{2,9}{EJ_0} + 1,417 EJ_0 \cdot \left(-\frac{36,91}{EJ_0}\right) + 20,25 = -19,72 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^n = 2,126 EJ_0 \cdot \frac{2,9}{EJ_0} + 1,417 EJ_0 \cdot \left(-\frac{36,91}{EJ_0}\right) - 20,25 = -66,39 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^n = 0 \text{ kNm}$$

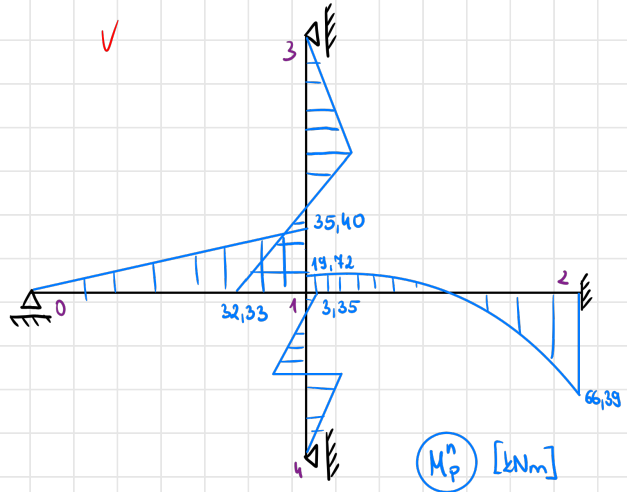
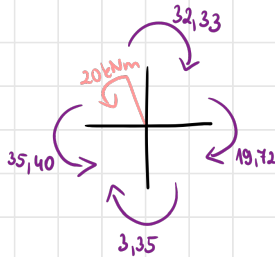
$$M_{13}^n = \frac{3}{4} EJ_0 \cdot \frac{2,9}{EJ_0} - 34,5 = -32,33 \text{ kNm}$$

$$M_{41}^n = 0 \text{ kNm}$$

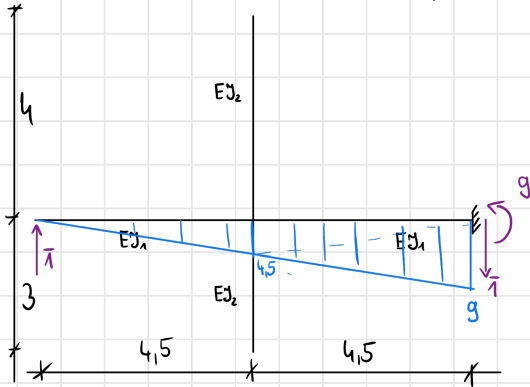
$$M_{14}^n = EJ_0 \cdot \frac{2,9}{EJ_0} - 6,25 = -3,35$$

równowaga węzła 1

$$\sum M^{(1)} = 32,33 + 19,72 + 3,35 - 35,40 - 20 = 0 //$$



kontrola kinematyczna - sprawdzenie przemieszczenia pionowego w węźle 0

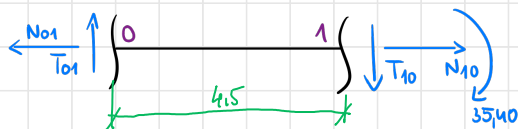


$$V_0 = \int \frac{M_p^n \cdot \bar{M}_0}{EJ} dx = \frac{1}{EJ_1} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 4,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 35,40 - \frac{1}{2} \cdot 19,72 \cdot 4,5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 4,5 + \frac{1}{3} \cdot 9\right) + \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 66,39 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 4,5\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{12 \cdot 4,5^3}{8} \cdot \frac{1}{2} (4,5 + 9) \right] = \frac{0,0675}{EJ} //$$

$$v_0 < \frac{1}{EJ} \Rightarrow v_0 \approx 0 \checkmark$$

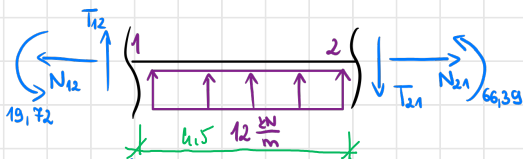


Wyznaczenie rozkładu sił poprzecznych



$$\Sigma M_0 = 4.5 \cdot T_{10} + 35.40 = 0$$

$$T_{10} = -7.867 \text{ kN} = T_{01}$$



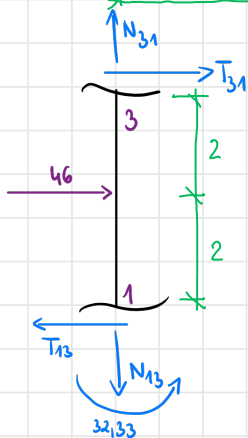
$$\Sigma M_2 = 4.5 T_{12} - 66.39 - 19.72 + 54 \cdot \frac{4.5}{2} = 0$$

$$\Sigma M_1 = 4.5 T_{21} - 66.39 - 19.72 - 54 \cdot \frac{4.5}{2} = 0$$

$$T_{12} = -7.864 \text{ kN} \quad T_{21} = 46.14 \text{ kN}$$

$$x_e = \frac{|T_{12}|}{q} = \frac{7.864}{12} = 0.655 \text{ m}$$

$$M_e = -7.864 \cdot 0.655 - 19.72 + 12 \cdot 0.655 \cdot \frac{0.655}{2} = -22.30 \text{ kN}$$

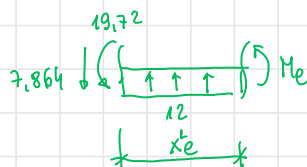


$$\Sigma M_3 = 4 T_{13} - 32.33 - 46 \cdot 2 = 0$$

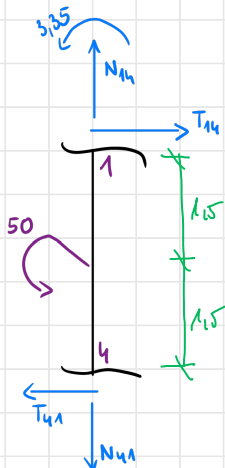
$$\Sigma M_1 = 4 T_{31} + 46 \cdot 2 - 32.33 = 0$$

$$T_{13} = 31.08 \text{ kN}$$

$$T_{31} = -14.92 \text{ kN}$$



rozciągające
górną część
włókien

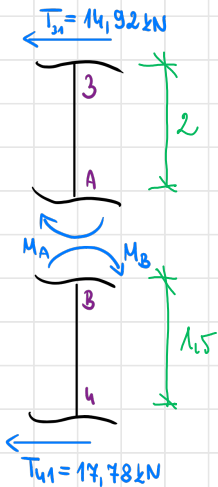


$$\Sigma M_1 = 3 T_{41} - 50 - 3.35 = 0$$

$$\Sigma M_4 = 3 T_{14} - 50 - 3.35 = 0$$

$$T_{41} = T_{14} = 17.78 \text{ kN}$$

Doliczanie brakujajacych momentow



$$\sum M_A = -14,92 \cdot 2 + M_A = 0$$

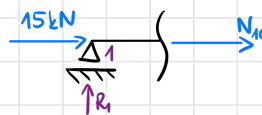
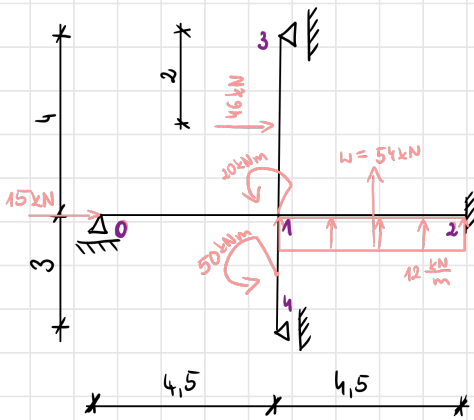
$$M_A = 29,84 \text{ kNm}$$

$$\sum M_B = M_B + 17,78 \cdot 1,5 = 0$$

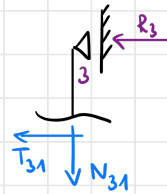
$$M_B = -26,67 \text{ kNm}$$

$$M_C = -26,67 + 50 = 23,33 \text{ kNm}$$

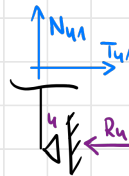
Wyznaczenie sil normalnych



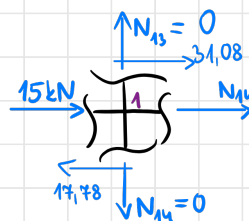
$$N_{10} = -15 \text{ kN}$$



$$N_{31} = 0 \text{ kN}$$

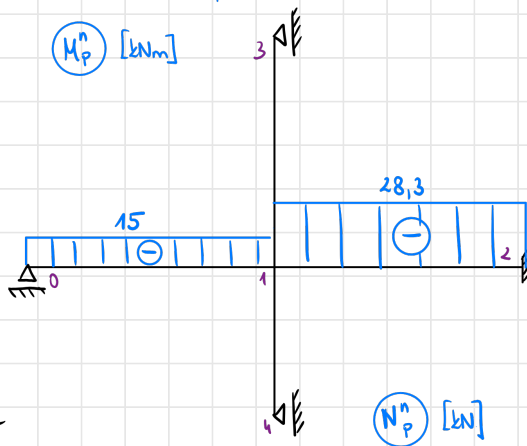
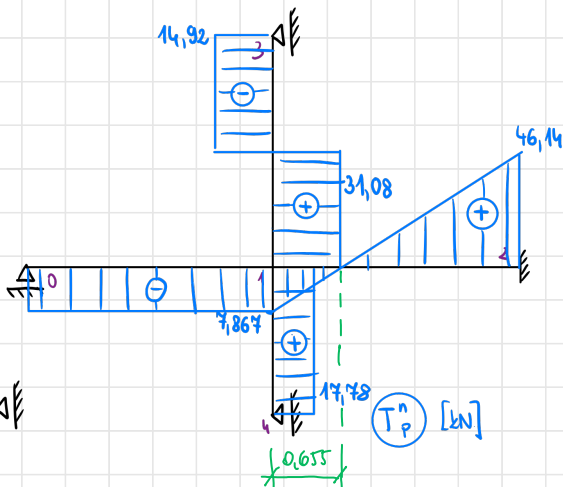
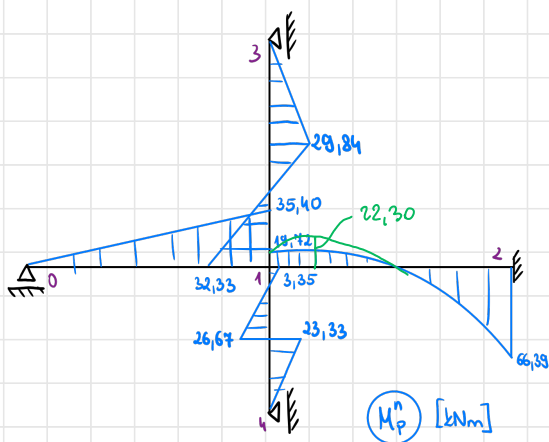


$$N_{41} = 0 \text{ kN}$$

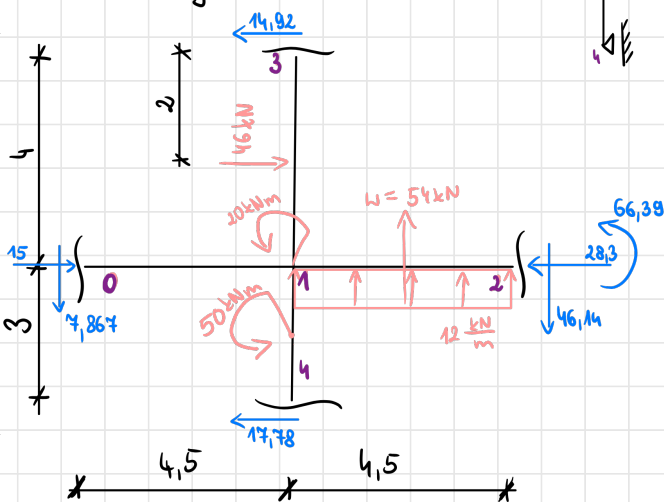


$$N_{14} = -31,08 - 15 + 17,78$$

$$N_{14} = -28,3 \text{ kN}$$



Kontrola statyczna



$$\begin{aligned}\sum X &= 15 + 46 - 14,92 - 28,3 - 17,78 = 0 \text{ kN} \\ \sum Y &= 54 - 46,14 - 7,867 = -0,007 \text{ kN} \approx 0 \\ \sum M_1 &= -20 - 50 + 3 \cdot 17,78 + 2 \cdot 46 - 4 \cdot 14,92 \\ &\quad - 4,5 \cdot 7,867 - 54 \cdot \frac{4,5}{2} + 46,14 \cdot 4,5 - 66,39 = \\ &= -0,0015 \text{ kNm} \approx 0\end{aligned}$$

sprawdzenie naprężeń normalnych ~~wyznaczonych momentem zginającym~~

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{A}$$

- 1340 HEA

$$\begin{aligned}M_{\max} &= 66,39 \text{ kNm} \\ W_y &= 1680 \text{ cm}^3 \\ A &= 133 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{66,39}{1680} + \frac{28,3}{133} = 41,65 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}}$$

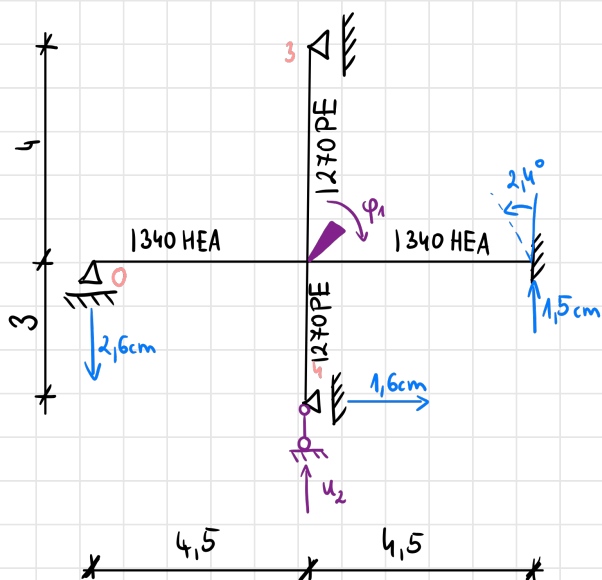
- 1240 PE

$$A = 45,90 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned}M_{\max} &= 32,33 \text{ kNm} \\ W_y &= 429 \text{ cm}^3 \\ N_{21} &= 28,3 \text{ kN} \\ N_{13} &= 0\end{aligned}$$

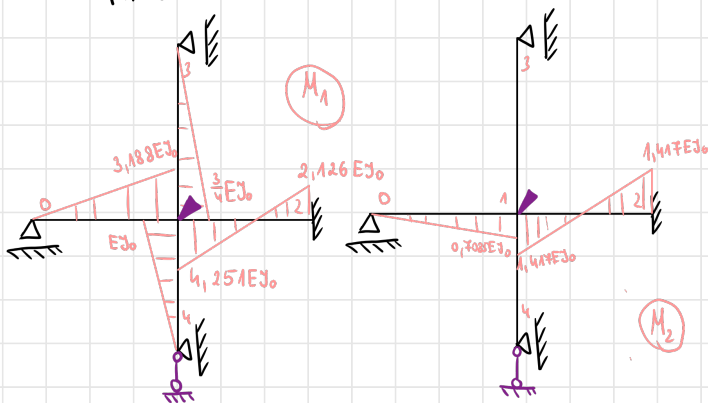
$$\sigma_{\max} = \frac{32,33}{429} = 75,36 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}}$$

Rama - osiadanie podpór



$$2,4^\circ = 2,4 \cdot \frac{\pi}{180} = 0,04189 \text{ rad}$$

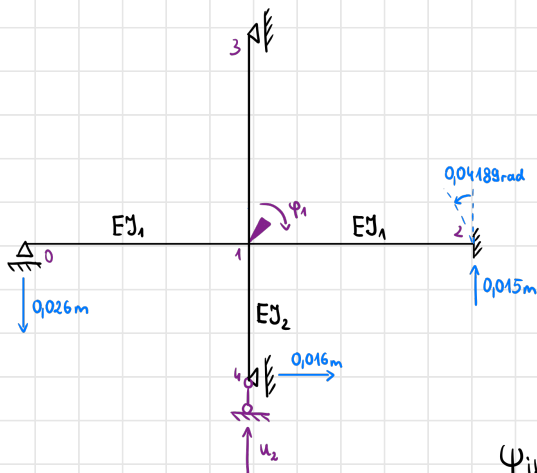
stan $\hat{\varphi}_1, \hat{u}_2$ taki sam



macierz sztywności:

$$\begin{bmatrix} 9,189 \text{ EJ}_0 & 0,7085 \text{ EJ}_0 \\ 0,7085 \text{ EJ}_0 & 0,7872 \text{ EJ}_0 \end{bmatrix}$$

stan "Δ"

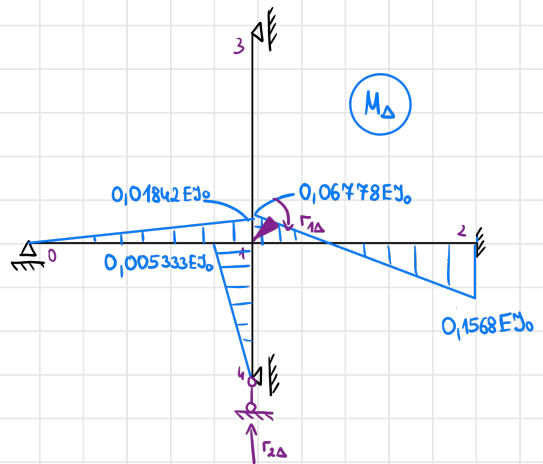


$$\psi_{ik} = \frac{v_k(\Delta) - v_i(\Delta)}{L_{ik}}$$

$$\psi_{01} = \frac{-0.026}{4.5} = -0.005778$$

$$\psi_{12} = \frac{-0.015}{4.5} = -0.003333$$

$$\psi_{14} = \frac{-0.016}{3} = -0.005333$$



$$M_{01} = M_{31} = M_{13} = M_{41} = 0$$

$$M_{10} = \frac{3EI_1}{4.5} [-(-0.005778)] = 0.01842EI_0$$

$$M_{21} = \frac{2EI_1}{4.5} [-2 \cdot 0.04189 + 0 - 3 \cdot (-0.003333)] = -0.1568EI_0$$

$$M_{12} = \frac{2EI_1}{4.5} [2 \cdot 0 - 0.04189 - 3 \cdot (-0.003333)] = -0.06778EI_0$$

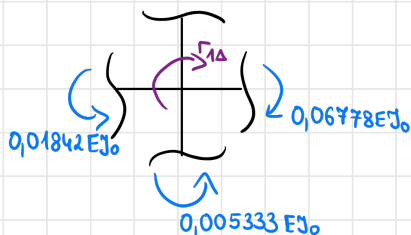
$$M_{14} = \frac{3EI_2}{3} [0 - (-0.005333)] = 0.005333EI_0$$

$$EI_1 = 4.7824EI_0$$

Wyznaczenie Γ_{ip}

$\Gamma_{1\Delta}$ - równowaga węzła 1

$$\Gamma_{1\Delta} = -0,06778EJ_0 + 0,005333EJ_0 + 0,01842EJ_0 = -0,04403EJ_0$$



$\Gamma_{2\Delta}$ - równanie prac wirtualnych

$$\Gamma_{2\Delta} \cdot \bar{1} + 0,01842EJ_0 \cdot \frac{\bar{1}}{4,5} + (-0,06778EJ_0) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,5}\right) + (-0,1568 \cdot EJ_0) \cdot \left(-\frac{\bar{1}}{4,5}\right) = 0$$

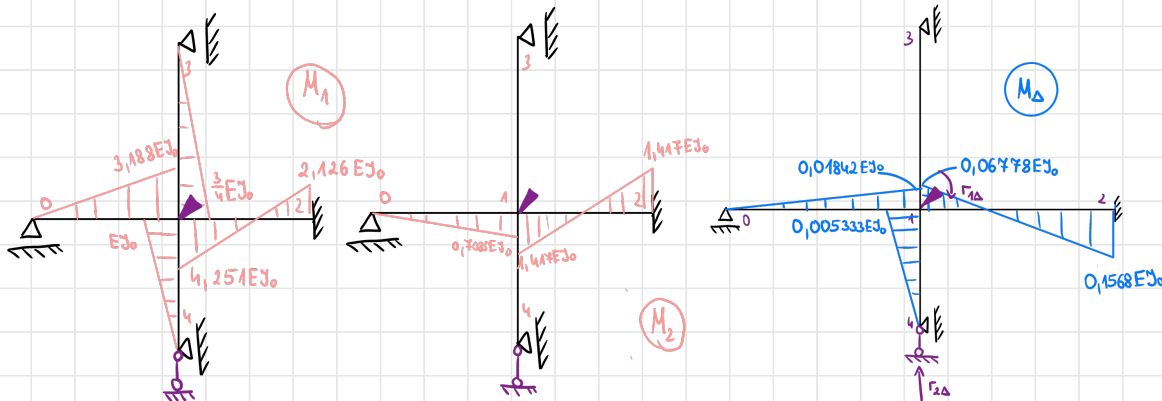
$$\Gamma_{2\Delta} = -0,054EJ_0$$

$$\begin{cases} 9,189EJ_0 \varphi_1 + 0,7085EJ_0 \Delta_2 - 0,04403EJ_0 = 0 \\ 0,7085EJ_0 \varphi_1 + 0,7872EJ_0 \Delta_2 - 0,054EJ_0 = 0 \end{cases}$$

$$EJ_0 = 12159 \text{ kNm}^2$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -0,0005346 \text{ rad} = -\frac{6,5}{EJ_0} \\ \Delta_2 &= 0,06908 \text{ m} = \frac{839,9}{EJ_0} \end{aligned}$$

Wyznaczenie rozkładu momentów zginających



$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(\Delta)}$$

$$M_{01}^n = M_{11}^n = M_{31}^n = 0 \text{ kNm}$$

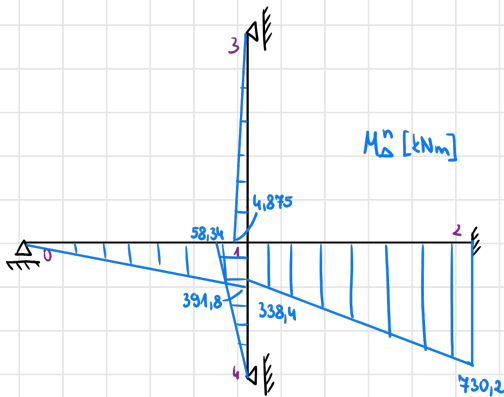
$$M_{10}^n = 3,188 \text{ EJ}_0 \cdot \left(-\frac{6,5}{\text{EJ}_0} \right) - 0,7085 \text{ EJ}_0 \cdot \frac{839,9}{\text{EJ}_0} + 0,01842 \cdot 12159 = -391,8 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^n = 4,251 \text{ EJ}_0 \cdot \left(-\frac{6,5}{\text{EJ}_0} \right) + 1,417 \text{ EJ}_0 \cdot \frac{839,9}{\text{EJ}_0} - 0,06778 \cdot 12159 = 338,4 \text{ kNm}$$

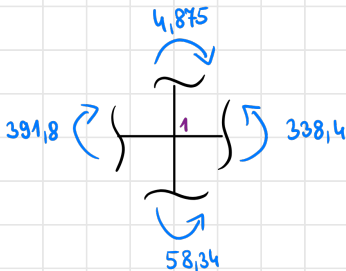
$$M_{21}^n = 2,126 \text{ EJ}_0 \cdot \left(-\frac{6,5}{\text{EJ}_0} \right) + 1,417 \text{ EJ}_0 \cdot \frac{839,9}{\text{EJ}_0} - 0,1568 \cdot 12159 = -730,2 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^n = \frac{3}{4} \text{ EJ}_0 \cdot \left(-\frac{6,5}{\text{EJ}_0} \right) = -4,875 \text{ kNm}$$

$$M_{14}^n = \text{EJ}_0 \cdot \left(-\frac{6,5}{\text{EJ}_0} \right) + 0,005333 \cdot 12159 = 58,34 \text{ kNm}$$

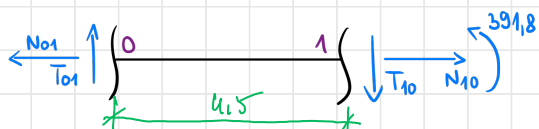


εόλποηαδα ηέηα 1 :



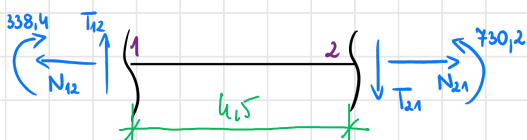
$$391,8 - 338,4 - 58,34 + 4,875 = -0,065 \text{ kNm} \approx 0$$

Wyznaczenie rozkładu sił poprzecznych



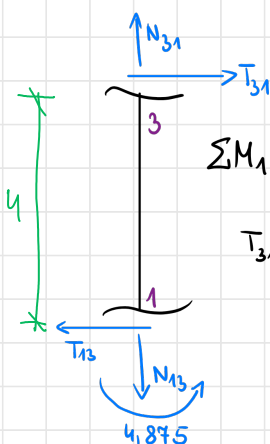
$$\sum M_0 = 4,5 T_{01} - 391,8 = 0$$

$$T_{01} = 87,07 \text{ kN} = T_{10}$$



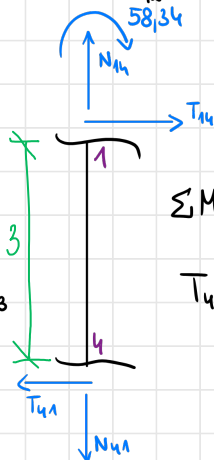
$$\sum M_1 = 4,5 T_{21} - 730,2 + 338,4 = 0$$

$$T_{12} = 87,07 = T_{21}$$



$$\sum M_1 = 4 T_{31} - 4,875 = 0$$

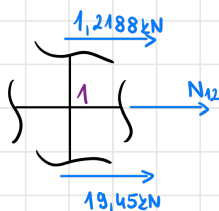
$$T_{31} = 1,2188 \text{ kN} = T_{13}$$



$$\sum M_1 = 3 T_{41} + 58,34 = 0$$

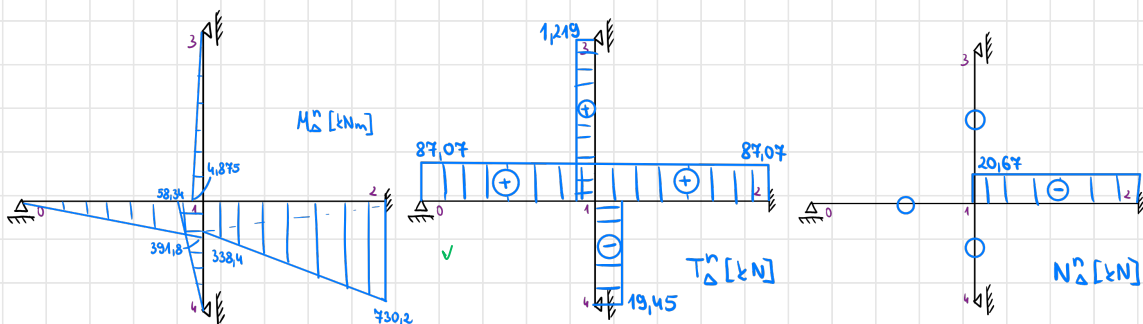
$$T_{41} = -19,45 \text{ kN} = T_{14}$$

Wyznaczenie sił normalnych

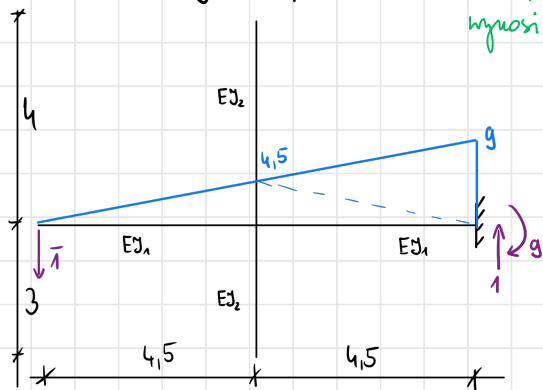


$$N_{12} = -19,45 - 1,219 = -20,67 \text{ kN}$$

W pozostałych prętach $N = 0$



kontrola kinematyczna - sprawdzenie - obł. przeszerzenie pionowego w p. 0", które wynosi 2,6 cm (w dół)



$$EJ_1 = 4,7824 EJ_2$$

$$V_0 = \int \frac{M_P^N \cdot \bar{M}^0}{EJ} dx - \bar{R}^0 \cdot \Delta = \frac{1}{EJ_1} \left[-\frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 4,5 \cdot 391,8 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 4,5 \left[4,5 \left(\frac{2}{3} \cdot 338,4 + \frac{1}{3} \cdot 730,2 \right) + 9 \left(\frac{1}{3} \cdot 338,4 + \frac{2}{3} \cdot 730,2 \right) \right] - (-9 \cdot 0,04189 + 1 \cdot 0,015) \right] = \frac{-19535}{4,7824 \cdot 12159} + 0,36201 = 0,02606 \text{ m}$$

$$\text{różnica } |\Delta V_0| = 0,02606 - 0,026 = 0,00006$$

$$1\% \cdot 0,026 = 0,00026$$

$$0,00026 > 0,00006$$

⇒ OK

Kontrola statyczna:

$$\sum X = -20,67 + 1,219 + 19,45 \approx 0 \text{ kN}$$

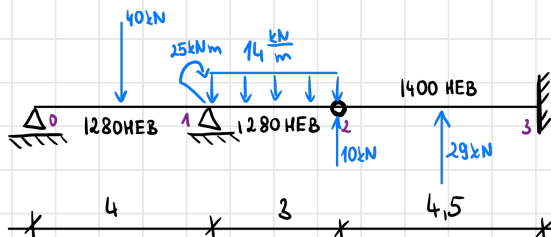
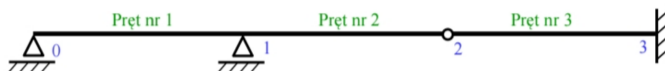
$$\sum Y = 87,07 - 87,07 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -730,2 + 2 \cdot 87,07 \cdot 4,5 + 1,219 \cdot 4 - 19,45 \cdot 3 = -0,044 \text{ kNm} \approx 0$$

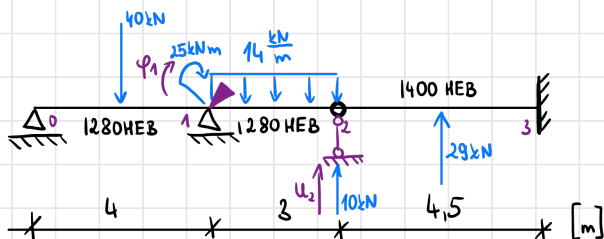
⇒ OK

Belka

Schemat 2



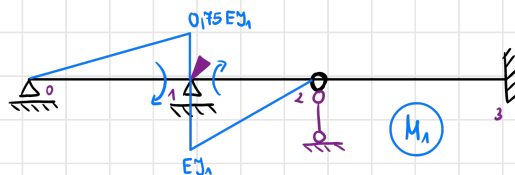
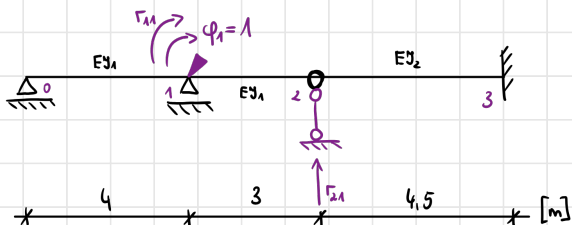
UP:



URK:

$$\begin{cases} r_{11}\varphi_1 + r_{12}u_2 + r_{1p} = 0 \\ r_{21}\varphi_1 + r_{22}u_2 + r_{2p} = 0 \end{cases}$$

stan $\varphi_1 = 1$



$$\begin{aligned} M_{01} &= 0 \\ M_{10} &= \frac{3EJ_1}{4} = 0,75EJ_1 \\ M_{12} &= \frac{3EJ_1}{3} = EJ_1 \\ M_{21} &= 0 \\ M_{23} &= 0 \end{aligned}$$

prekroje:

I 280 HEB

$$J_1 = 19270 \text{ cm}^4$$

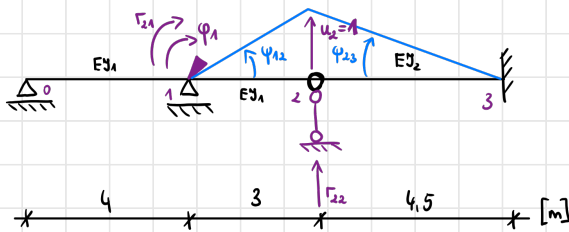
I 400 HEB

$$J_2 = 57680 \text{ cm}^4$$

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{57680}{19270} = 2,993$$

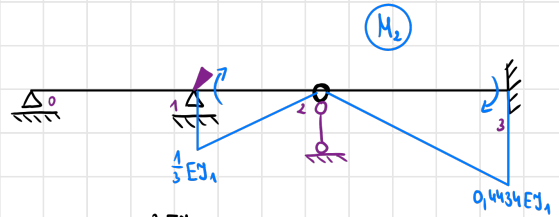
$$J_2 = 2,993 J_1$$

stan $u_2 = 1$



$$\psi_{12} = -\frac{1}{3}$$

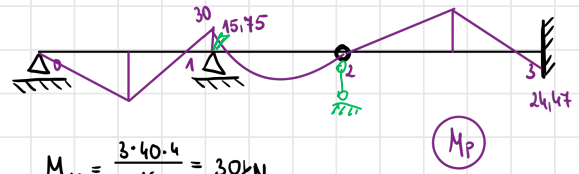
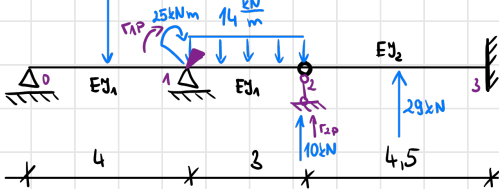
$$\psi_{23} = \frac{1}{4.5}$$



$$M_{12} = \frac{3EJ_1}{3} \left(0 - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{3} EJ_1$$

$$M_{32} = \frac{3EJ_2}{4.5} \left(0 - \frac{1}{4.5} \right) = -\frac{3 \cdot 2.993 EJ_1}{20.25} = -0.4434 EJ_1$$

stan P''

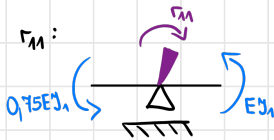


$$M_{10} = \frac{3 \cdot 40 \cdot 4}{16} = 30 \text{ kNm}$$

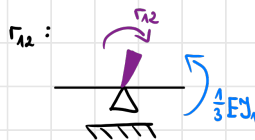
$$M_{12} = \frac{14 \cdot 3^2}{8} = 15.75 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = \frac{3 \cdot 29 \cdot 4.5}{16} = 24.47 \text{ kNm}$$

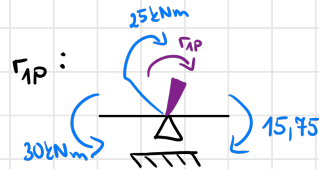
wyznaczenie r_{ik} i r_{ip}



$$r_{11} = EJ_1 + 0.75 EJ_1 = 1.75 EJ_1$$



$$r_{12} = \frac{1}{3} EJ_1$$



$$r_{1p} = 30 - 25 - 15.75 = -10.75 \text{ kNm}$$

$$r_{21} \cdot \bar{1} + EJ_1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = 0$$

$$r_{21} = \frac{1}{3} EJ_1$$

$$r_{22} \cdot \bar{1} + \frac{1}{3} EJ_1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) - 0.4434 EJ_1 \cdot \frac{1}{4.5} = 0$$

$$r_{22} = 0.2096 EJ_1$$

$$r_{2p} \cdot \bar{1} - 14 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \bar{1} + 29 \cdot \frac{1}{2} - 15.75 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) - 24.47 \cdot \frac{1}{4.5} = 0$$

$$r_{2p} = -3.312 \text{ kN}$$

macierz sztywności

$$K = \begin{bmatrix} 1,75EJ_0 & \frac{1}{3}EJ_1 \\ \frac{1}{3}EJ_1 & 0,2096EJ_1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} 1,75EJ_1 \cdot \varphi_1 + \frac{1}{3}EJ_1 u_2 - 10,75 = 0 \\ \frac{1}{3}EJ_1 \varphi_1 + 0,2096EJ_1 u_2 - 3,312 = 0 \end{cases} : EJ_1$$

$$EJ_1 = 2,1 \cdot 19270 = 40467 \text{ kNm}^2$$

$$\begin{cases} 1,75\varphi_1 + \frac{1}{3}u_2 = \frac{10,75}{EJ_1} \\ \frac{1}{3}\varphi_1 + 0,2096u_2 = \frac{3,312}{EJ_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0,0001111 \text{ rad} \\ u_2 = 0,0002138 \text{ m} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{4,496}{EJ_1} \\ u_2 = \frac{8,652}{EJ_1} \end{cases}$$

Wyznaczanie rozkładu momentów zginających

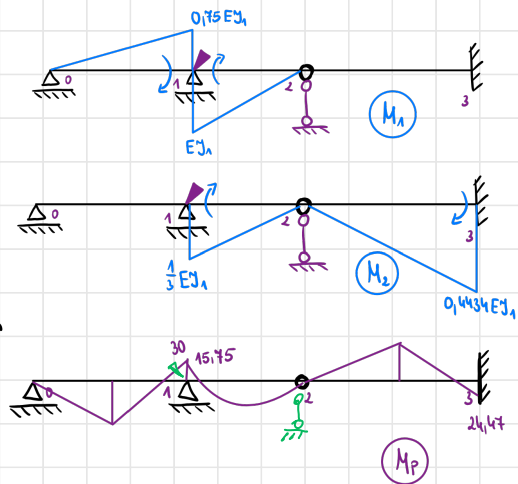
$$M_{ik}^n = M_{ik}^{(1)} \cdot \varphi_1 + M_{ik}^{(2)} \cdot u_2 + M_{ik}^{(P)}$$

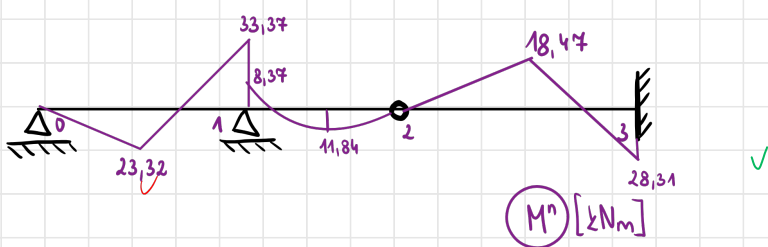
$$M_{01}^n = M_{21}^n = M_{23}^n = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{10}^n = 0,75EJ_1 \cdot \frac{4,496}{EJ_1} + 30 = 33,37 \text{ kNm}$$

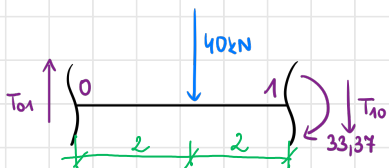
$$M_{12}^n = EJ_1 \cdot \frac{4,496}{EJ_1} + \frac{1}{3}EJ_1 \cdot \frac{8,652}{EJ_1} - 15,75 = -8,37 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^n = -0,4434EJ_1 \cdot \frac{8,652}{EJ_1} - 24,47 = -28,31 \text{ kNm}$$



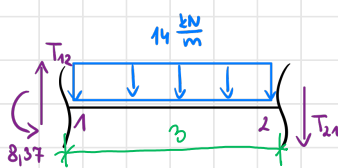


Wyznaczanie rozkładu sił poprzecznych



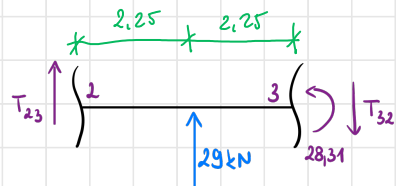
$$\sum M_0 = 4T_{10} + 33,37 + 2 \cdot 40 = 0$$

$$T_{10} = -28,34 \text{ kN}$$



$$\sum M_1 = 14 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot T_{21} - 8,37 = 0$$

$$T_{21} = -18,21 \text{ kN}$$



$$\sum M_2 = 4,5T_{32} - 29 \cdot \frac{4,5}{2} - 28,31 = 0$$

$$T_{32} = 20,79 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 4T_{01} - 2 \cdot 40 + 33,37 = 0$$

$$T_{01} = 11,66 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = -14 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + 3T_{12} - 8,37 = 0$$

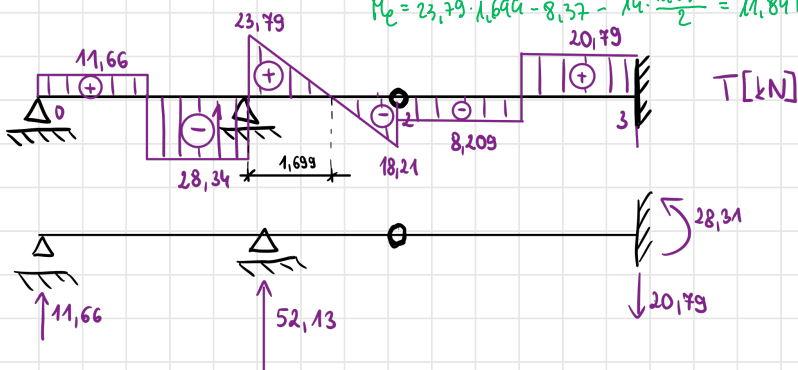
$$T_{12} = 23,79 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 4,5T_{23} + 29 \cdot \frac{4,5}{2} - 28,31 = 0$$

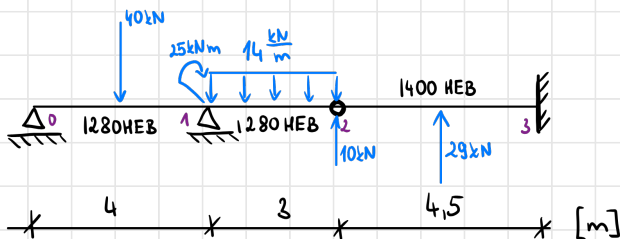
$$T_{23} = -8,209 \text{ kN}$$

$$x_c = \frac{T_{12}}{q} = \frac{23,79}{14} = 1,699 \text{ m}$$

$$M_c = 23,79 \cdot 1,699 - 8,37 - 14 \cdot \frac{1,699^2}{2} = 11,84 \text{ kNm}$$



B - metoda przemieszczeń w ujęciu macierowym



przekroje:

I 280 HEB

$$J_1 = 19270 \text{ cm}^4$$

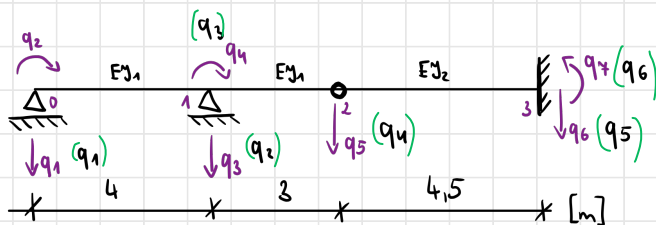
I 400 HEB

$$J_2 = 57680 \text{ cm}^4$$

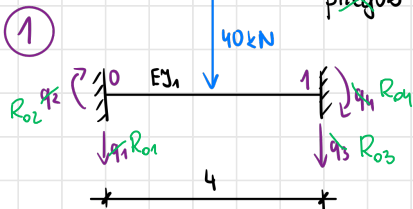
$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{57680}{19270} = 2,993$$

$$J_2 = 2,993 J_1$$

niewiadome przemieszczenia węzłowe



pręty - elementy



utwierdź
pręty - utwierdzenie

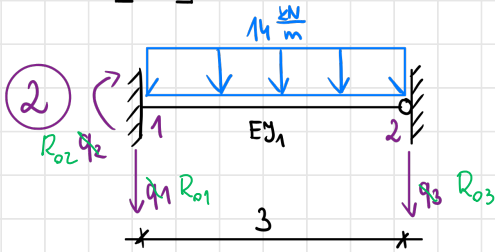
waga!
Przyjęto w zadaniu inny układ podstawowy niż w rozdziale → zablokowany rotacji w węzle "0", stąd element (1) jest el utw - utw.

$$EI_1 = 2,1 \cdot 19270 = 40467 \text{ kNm}^2$$

sformułowanie zadania jest inne, ale oczywiście prowadzi do tych samych wyników

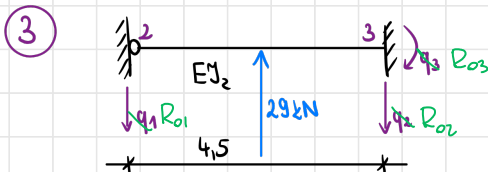
$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{4^3} & \frac{6EI_1}{4^2} & -\frac{12EI_1}{4^3} & \frac{6EI_1}{4^2} \\ \frac{6EI_1}{4^2} & \frac{4EI_1}{4} & -\frac{6EI_1}{4^2} & \frac{2EI_1}{4} \\ -\frac{12EI_1}{4^3} & -\frac{6EI_1}{4^2} & \frac{12EI_1}{4^3} & \frac{6EI_1}{4^2} \\ \frac{6EI_1}{4^2} & \frac{2EI_1}{4} & -\frac{6EI_1}{4^2} & \frac{4EI_1}{4} \end{bmatrix} = EI_1 \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375 & -0,1875 & 0,375 \\ 0,375 & 1,0 & -0,375 & 0,5 \\ -0,1875 & -0,375 & 0,1875 & -0,375 \\ 0,375 & 0,5 & -0,375 & 1,0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix}$$



$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{3EJ_1}{3^3} & \frac{3EJ_1}{3^2} & -\frac{3EJ_1}{3^3} \\ \frac{3EJ_1}{3^2} & \frac{3EJ_1}{3} & -\frac{3EJ_1}{3^2} \\ -\frac{3EJ_1}{3^3} & \frac{3EJ_1}{3^2} & \frac{3EJ_1}{3^3} \end{bmatrix} = EJ_1 \begin{bmatrix} 0,1111 & 0,3333 & -0,1111 \\ 0,3333 & 1,0 & -0,3333 \\ -0,1111 & -0,3333 & 0,1111 \end{bmatrix}$$

$$R_{02} = \begin{bmatrix} -\frac{5ql}{8} \\ -\frac{ql^2}{8} \\ -\frac{3ql}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26,25 \\ -15,75 \\ -15,75 \end{bmatrix}$$



$$Y_2 = 2,993 Y_1$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{3EJ_2}{4,5^3} & -\frac{3EJ_2}{4,5^3} & \frac{3EJ_2}{4,5^2} \\ -\frac{3EJ_2}{4,5^3} & \frac{3EJ_2}{4,5^3} & -\frac{3EJ_2}{4,5^2} \\ \frac{3EJ_2}{4,5^2} & -\frac{3EJ_2}{4,5^2} & \frac{3EJ_2}{4,5} \end{bmatrix} = EJ_1 \begin{bmatrix} 0,09854 & -0,09854 & 0,4434 \\ -0,09854 & 0,09854 & -0,4434 \\ 0,4434 & -0,4434 & 1,995 \end{bmatrix}$$

$$R_{03} = \begin{bmatrix} \frac{5P}{16} \\ \frac{11P}{16} \\ -\frac{3PL}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,063 \\ 19,94 \\ -24,47 \end{bmatrix}$$

tabela powiązań

numer elementu	nr przemieszczeń			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	—
3	5	6	7	—

agregacja macierzy sztywności

$$K_1 = EJ \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375 & -0,1875 & 0,375 \\ 0,375 & 1,0 & -0,375 & 0,5 \\ -0,1875 & -0,375 & 0,1875 & -0,375 \\ 0,375 & 0,5 & -0,375 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$K_2 = EJ \begin{bmatrix} 0,1111 & 0,3333 & -0,1111 \\ 0,3333 & 1,0 & -0,3333 \\ -0,1111 & -0,3333 & 0,1111 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$K_3 = EJ \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0,09854 & -0,09854 & 0,4434 \\ -0,09854 & 0,09854 & -0,4434 \\ 0,4434 & -0,4434 & 1,995 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$K = EJ_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0,1875 & 0,375 & -0,1875 & 0,375 & 0 & 0 & 0 \\ 0,375 & 1,0 & -0,375 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1875 & -0,375 & 0,1875 + 0,1111 & -0,375 + 0,3333 & -0,1111 & 0 & 0 \\ 0,375 & 0,5 & -0,375 + 0,3333 & 1,0 + 1,0 & -0,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1111 & -0,3333 & 0,1111 + 0,09854 & -0,09854 & 0,4434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,09854 & 0,09854 & -0,4434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4434 & -0,4434 & 1,995 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$K = EJ_1 \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375 & -0,1875 & 0,375 & 0 & 0 & 0 \\ 0,375 & 1,0 & -0,375 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1875 & -0,375 & 0,2986 & -0,0417 & -0,1111 & 0 & 0 \\ 0,375 & 0,5 & -0,0417 & 2 & -0,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1111 & -0,3333 & 0,2096 & -0,09854 & 0,4434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,09854 & 0,09854 & -0,4434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4434 & -0,4434 & 1,995 \end{bmatrix}$$

agregacja wektora reakcji przywęzłowych od obciążenia przęsłowego

$$R_{01} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$R_{02} = \begin{bmatrix} -26,25 \\ -15,75 \\ -15,75 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$R_{03} = \begin{bmatrix} 9,063 \\ 19,94 \\ -24,47 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 - 26,25 \\ 20 - 15,75 \\ -15,75 + 9,063 \\ 19,94 \\ -24,47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -46,25 \\ 4,25 \\ -6,687 \\ 19,94 \\ -24,47 \end{bmatrix}$$

wektor sił węzłowych

$$P_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uwzględnienie warunków podparcia belki

zerowe przemieszczenia węzłowe: $q_1 = 0$ $q_3 = 0$ $q_6 = 0$ $q_7 = 0$

$$K = EJ_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375 & -0,1875 & 0,375 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0,375 & 1,0 & -0,375 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -0,1875 & -0,375 & 0,2386 & 0,0417 & -0,1111 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,375 & 0,5 & -0,0417 & 2 & -0,3333 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1111 & -0,3333 & 0,2096 & -0,09854 & 0,4434 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0,09854 & 0,09854 & -0,4434 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4434 & -0,4434 & 1,995 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -46,25 \\ 4,25 \\ -6,687 \\ 19,84 \\ -24,44 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \quad P_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

$$K_{red} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & -0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0,2096 \end{bmatrix} \quad R_{red} = \begin{bmatrix} -20 \\ 4,25 \\ -6,687 \end{bmatrix} \quad P_{w,red} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ -10 \end{bmatrix}$$

równanie równowagi

$$K_{red} q_{red} = P_{w,red} - R_{red}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & -0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0,2096 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -20 \\ 4,25 \\ -6,687 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 2 & -0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0,2096 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20,75 \\ -3,313 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_1} \begin{bmatrix} 17,75 \\ 4,493 \\ -8,662 \end{bmatrix}$$

$q_2 = \frac{17,75}{EI}$ jest kątem obrotu węzła "0",
którego nie wyznaczono w poprzed-
nim wariantzie zadania

$$q_4 = \varphi_1$$

$$q_5 = M_2$$

wektory przemieszczeń dla elementów

$$q_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 17,75 \\ 0 \\ 4,493 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4,493 \\ -8,662 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI_1} \begin{bmatrix} -8,662 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektory końcowych reakcji węzłowych

$$R_1 = K_1 q_1 + R_{01} = \frac{1}{EJ_1} \begin{bmatrix} 0,1875 & 0,375 & -0,1875 & 0,375 \\ 0,375 & 1,0 & -0,375 & 0,5 \\ -0,1875 & -0,375 & 0,1875 & -0,375 \\ 0,375 & 0,5 & -0,375 & 1,0 \end{bmatrix} EJ_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 17,75 \\ 0 \\ 4,493 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 \\ -20 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,66 \\ -0,0035 \\ -28,34 \\ 33,37 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = K_2 q_2 + R_{02} = \frac{1}{EJ_1} \begin{bmatrix} 0,1111 & 0,3333 & -0,1111 \\ 0,3333 & 1,0 & -0,3333 \\ -0,1111 & -0,3333 & 0,1111 \end{bmatrix} EJ_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4,493 \\ -8,662 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -26,25 \\ -15,75 \\ -15,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,79 \\ -8,37 \\ -18,21 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = K_3 q_3 + R_{03} = \frac{1}{EJ_1} \begin{bmatrix} 0,09854 & -0,09854 & 0,4434 \\ -0,09854 & 0,09854 & -0,4434 \\ 0,4434 & -0,4434 & 1,995 \end{bmatrix} EJ_1 \begin{bmatrix} -8,662 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,063 \\ 19,94 \\ -24,47 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,209 \\ 20,79 \\ -28,31 \end{bmatrix}$$

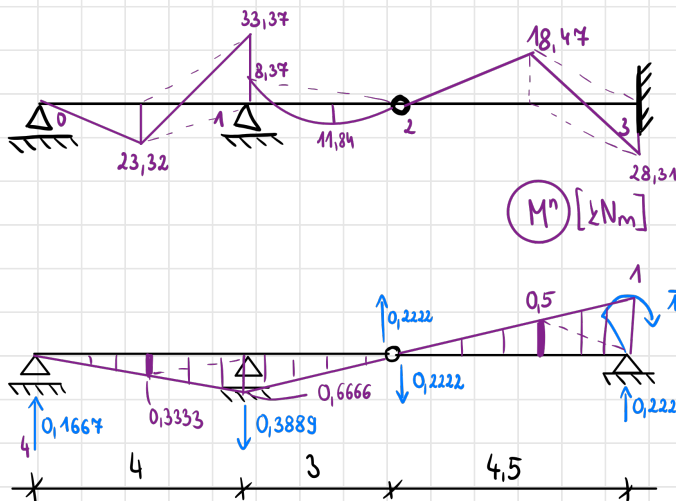
wartości sił węzłowych na końcach prętów

$$\begin{bmatrix} T_{01} \\ M_{01} \\ T_{10} \\ M_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,66 \\ -0,0035 \\ -28,34 \\ 33,37 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,79 \\ -8,37 \\ -18,21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{23} \\ T_{32} \\ M_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,209 \\ 20,79 \\ -28,31 \end{bmatrix}$$

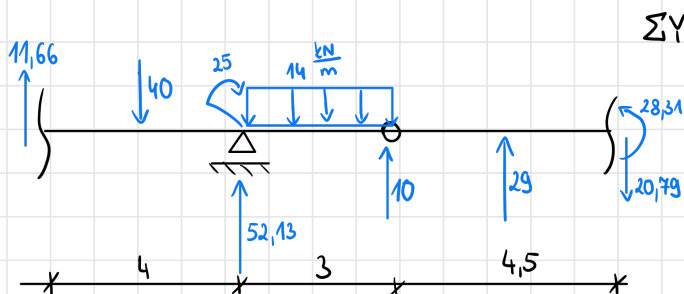
Kontrola kinematyczna - obrót w utwierdzeniu



$$\varphi = \frac{1}{EI_1} \left[\frac{1}{2} \cdot 0,3333 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 23,32 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 23,32 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,3333 + \frac{1}{3} \cdot 0,6666 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 33,37 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,3333 + \frac{2}{3} \cdot 0,6666 \right) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8,37 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,6666 + \frac{2}{3} \cdot \frac{14 \cdot 3^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,6666 \right] + \frac{1}{EI_2} \left[\frac{1}{2} \cdot 2,25 \cdot 18,47 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 2,25 \cdot 18,47 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot 2,25 \cdot 28,31 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 0,5 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{1,928}{EI_1} - \frac{5,762}{2,993 EI_1} = \frac{0,002841}{EI_1}$$

$$\varphi < \frac{1}{EI_1} \Rightarrow \varphi \approx 0$$

Kontrola statyczna



$$\sum Y = 29 + 52,13 + 11,66 - 40 - 14 \cdot 3 - 20,79 + 10 = 0$$

$$\sum M = 11,66 \cdot 7 - 40 \cdot 5 + 25 + 52,13 \cdot 3 - 14 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 29 \cdot 2,25 - 28,31 + 20,79 \cdot 4,5 = 0,005 \text{ kNm}$$

$\Rightarrow$ jest OK.
THE END ☺