

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH  
Zakład Mechaniki Budowli

*ĆWICZENIE nr 2*

**UKŁADY STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE – METODA SIŁ**

**Prowadzący:** *mgr inż. A. Kaczor*

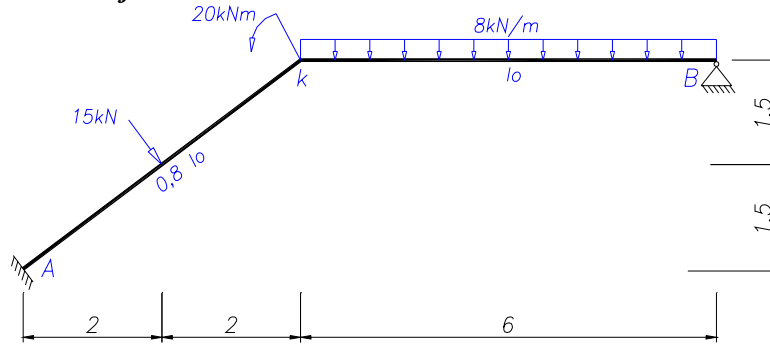
*Wykonał:* **Piotr Matysiak**

Grupa 1

Rok akad. 2002/2003

STUDIUM ZAOCZNE

## 1. Schemat konstrukcji.



### 1.1. Stopień statycznej niewyznaczalności.

$$n = W + 3 \cdot (a - 1) - g, \quad \text{gdzie: } W - \text{ilość więzów; } W = 5$$

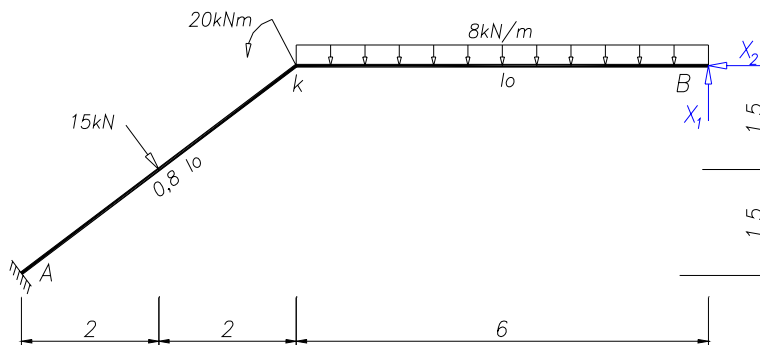
$$a - \text{liczba pól zamkniętych; } a = 0$$

$$g - \text{liczba przegubów; } g = 0$$

$$n = 5 + 3 \cdot (0 - 1) - 0$$

$$n = 2 \Rightarrow \text{rozpatrywana rama jest układem dwukrotnie statycznie niewyznaczalnym}$$

## 2. Układ podstawowy:



### 2.1. Warunki statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności:

$$W \geq 3 \cdot t, \quad \text{gdzie } W - \text{ilość więzów; } W = 3$$

$$t - \text{ilość tarcz; } t = 1$$

$$3 \geq 3 \cdot 1$$

$$3 = 3 \Rightarrow \text{warunek konieczny jest spełniony;}$$

układ tworzy tarcza zamocowana wspornikowo – war. dostateczny spełniony.

## 3. Układ równań kanonicznych:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1P} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2P} = 0$$

### 3.1. Wyznaczenie współczynników $\delta_{ik}$ , $\delta_{iP}$ układu równań kanonicznych

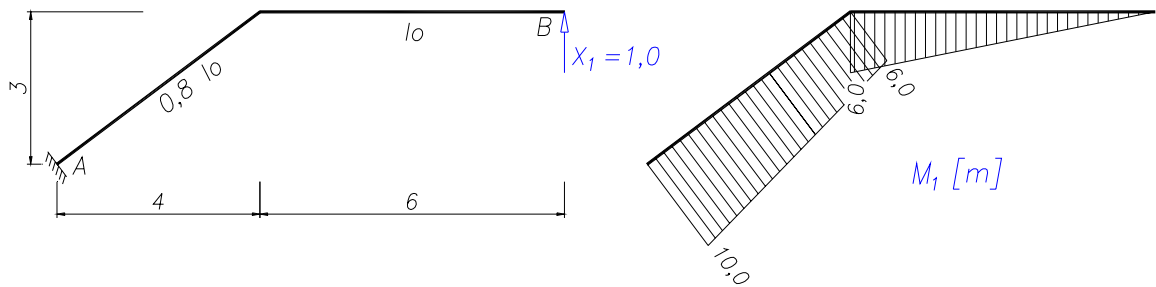
$$\delta_{ik} = \sum_0^l \int \frac{M_i M_k}{EI} dx$$

$$\delta_{iP} = \sum_0^l \int \frac{M_i M_P^0}{EI} dx,$$

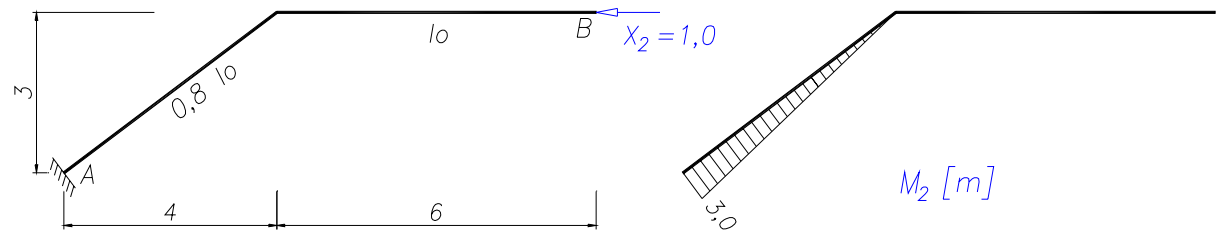
gdzie:  $M_i$  – momenty zginające od obciążenia siłą jednostkową  $X_i=1,0$  (w układzie podstawowym)

$M_P^0$  – momenty zginające od obciążenia zewnętrznego (w układzie podstawowym)

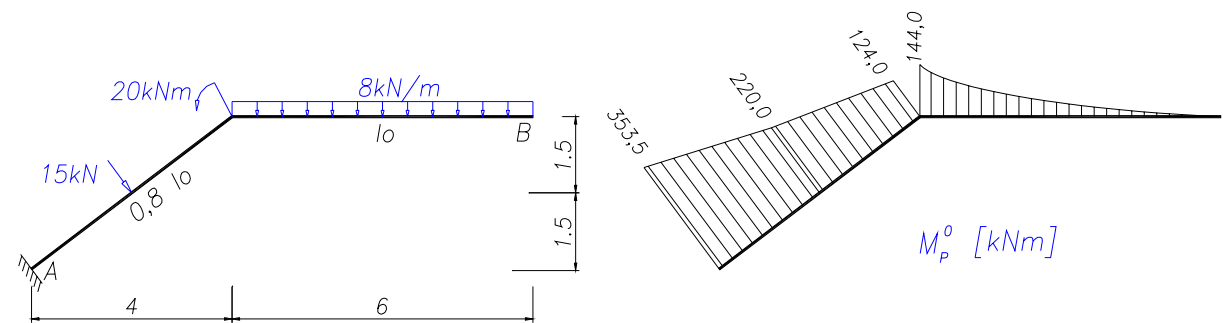
**3.1.1. Stan  $X_1 = 1$ :**



**3.1.2. Stan  $X_2 = 1$ :**



**3.1.3. Stan P:**



**3.1.4. Obliczenie uogólnionych przemieszczeń  $\delta_{ik}$ ,  $\delta_{iP}$ .**

**Reguła Mohra - Wereszczagina:**

$$\int_0^l M\bar{M}dx = \Omega \cdot \bar{\eta}_0$$

gdzie:  $\Omega$  - pole pod wykresem funkcji M;

$\bar{\eta}_0$  - rzędna (wartość  $\bar{M}$ ) pod środkiem ciężkości wykresu M;

**Obliczenia:**

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1^2}{EI_0} dx$$

$$EI_0 \delta_{11} = 1/0,8 \cdot 5/6 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot 6) + 0,5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 = 480,33333 \text{ m}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]}$$

$$\delta_{22} = \sum \int_0^l \frac{M_2^2}{EI_0} dx$$

$$EI_0 \delta_{22} = 1/0,8 \cdot 0,5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2/3 \cdot 3 = 18,75000 \text{ m}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]}$$

$$\delta_{12} = \sum \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_2}{EI_o} dx = \delta_{21}$$

$$EI_o \delta_{12} = EI_o \delta_{21} = 1/0,8 \cdot 5/6 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 3) = 81,25000 \text{ m}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]}$$

$$\delta_{1P} = \sum \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_P^o}{EI_o} dx$$

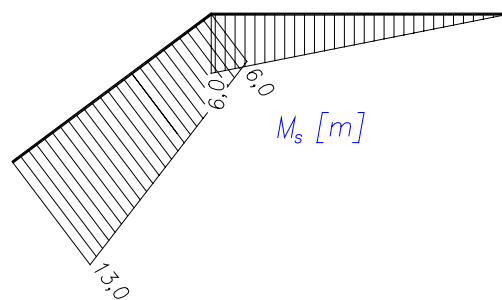
$$EI_o \delta_{1P} = 2/3 \cdot 6 \cdot 36 \cdot 0,5 \cdot 6 - 0,5 \cdot 144 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 - 1/0,8 \cdot [2,5/6 \cdot (2 \cdot 124 \cdot 6 + 2 \cdot 220 \cdot 8 + 124 \cdot 8 + 220 \cdot 6) + 2,5/6 \cdot (2 \cdot 220 \cdot 8 + 2 \cdot 353,5 \cdot 10 + 220 \cdot 10 + 353,5 \cdot 8)] = -13242,87500 \text{ kNm}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{kNm]}$$

$$\delta_{2P} = \sum \int_0^l \frac{M_2 \cdot M_P^o}{EI_o} dx$$

$$EI_o \delta_{2P} = -1/0,8 \cdot [2,5/6 \cdot (2 \cdot 124 \cdot 0 + 2 \cdot 220 \cdot 1,5 + 124 \cdot 1,5 + 220 \cdot 0) + 2,5/6 \cdot (2 \cdot 220 \cdot 1,5 + 2 \cdot 353,5 \cdot 3 + 220 \cdot 3 + 353,5 \cdot 1,5)] = -508,98437 \text{ kNm}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{kNm]}$$

### 3.2. Kontrola poprawności obliczenia współczynników równania kanonicznego.

#### 3.2.1. Stan sumaryczny $S=M_1+M_2$ :



#### Obliczenie przemieszczeń Regułą Mohra - Wereszczagina:

$$\delta_{SS} = \sum \int_0^l \frac{M_S^2}{EI_o} dx$$

$$EI_o \delta_{SS} = 1/0,8 \cdot 5/6 \cdot (2 \cdot 13 \cdot 13 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 13 \cdot 6) + 0,5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 = 661,58333 \text{ m}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]}$$

$$\delta_{1S} = \sum \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_S}{EI_o} dx$$

$$EI_o \delta_{1S} = 1/0,8 \cdot 5/6 \cdot (2 \cdot 10 \cdot 13 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 6 \cdot 13) + 0,5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 = 561,58333 \text{ m}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]}$$

$$\delta_{2S} = \sum \int_0^l \frac{M_2 \cdot M_S}{EI_o} dx$$

$$EI_o \delta_{2S} = 1/0,8 \cdot 5/6 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 13 + 2 \cdot 0 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 13) = 100,00000 \text{ m}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{m]}$$

$$\delta_{SP} = \sum \int_0^l \frac{M_S \cdot M_P^o}{EI_o} dx$$

$$EI_o \delta_{SP} = 2/3 \cdot 6 \cdot 36 \cdot 0,5 \cdot 6 - 0,5 \cdot 144 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 6 - 1/0,8 \cdot [2,5/6 \cdot (2 \cdot 124 \cdot 6 + 2 \cdot 220 \cdot 9,5 + 124 \cdot 9,5 + 220 \cdot 6) + 2,5/6 \cdot (2 \cdot 220 \cdot 9,5 + 2 \cdot 353,5 \cdot 13 + 220 \cdot 13 + 353,5 \cdot 9,5)] = -15751,85938 \text{ kNm}^3 \text{ [m}^2 \cdot \text{kNm]}$$

**Porównanie:**

i	$\delta_{1i}$	$\delta_{2i}$	$\delta_{iP}$	$\delta_{is}$
1	480,33333	81,25000	- 13 242,87500	561,58333
2	81,25000	18,75000	- 2 508,98438	100,00000
			- 15 751,85938	661,58333
			$\delta_{SP}$	$\delta_{SS}$

**3.3. Rozwiązanie układu równań kanonicznych (po podzieleniu przez  $EI_0$ ).**

$$480,33333 \cdot X_1 + 81,25000 \cdot X_2 - 13242,87500 = 0$$

$$81,25000 \cdot X_1 + 18,75000 \cdot X_2 - 2508,98437 = 0$$

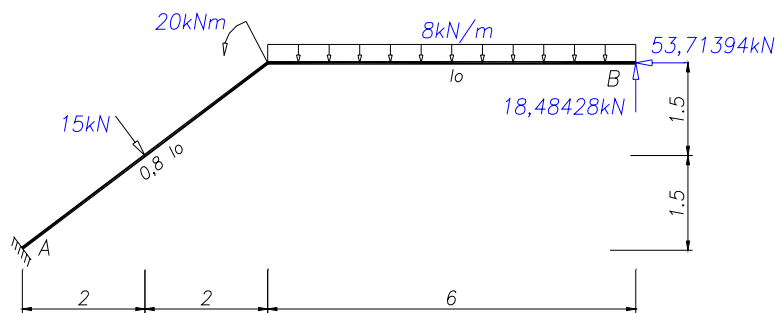
Obliczenia przeprowadzono w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel.

**$X_1 = 18,48428 \text{ kN}$**

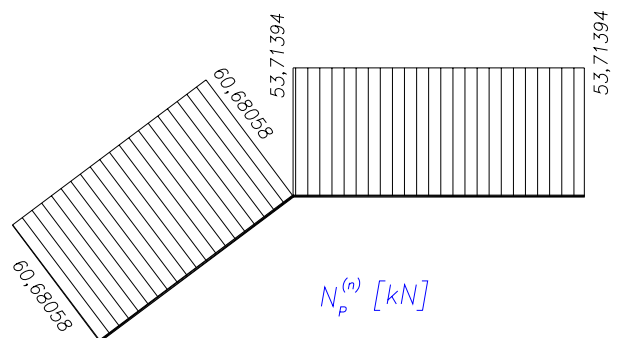
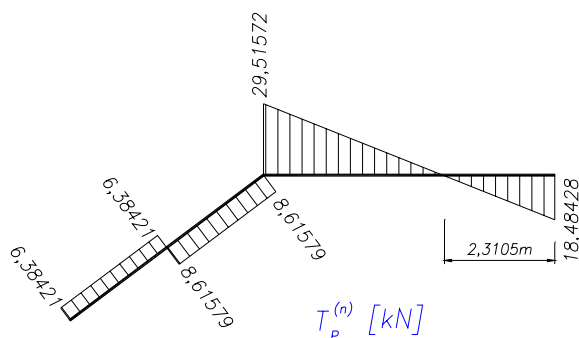
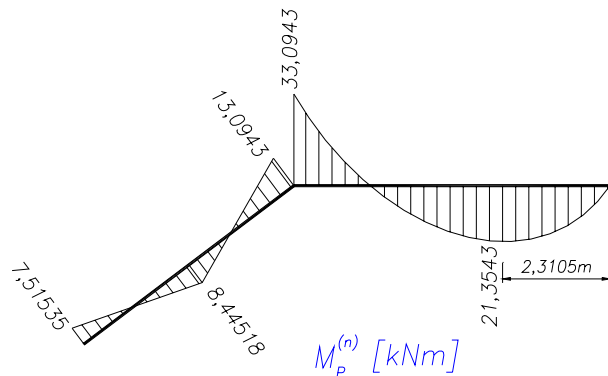
**$X_2 = 53,71394 \text{ kN}$**

**4. Wyznaczenie sił wewnętrznych w zadanej ramie.**

**4.1. Schemat obliczeniowy:**

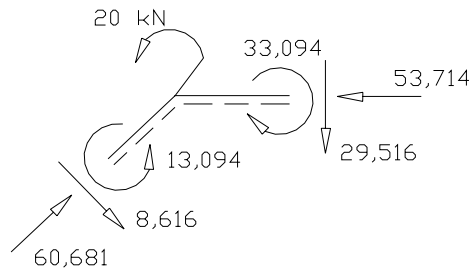


**4.2. Wykres funkcji sił przekrojowych N, T, M.**



## 5. Kontrola poprawności obliczeń.

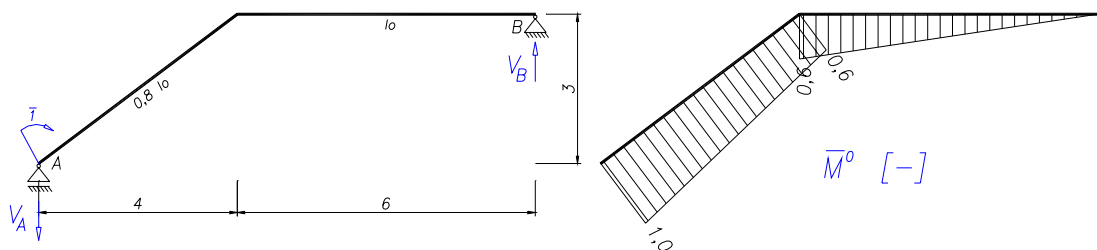
### 5.1. Kontrola statyczna.



$$\begin{aligned} \sum X = 0: & \quad - 53,71394 + 60,68058 \cdot \cos\alpha + 8,61579 \cdot \sin\alpha = 0 \\ & \quad 0 = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad - 29,51572 + 60,68058 \cdot \sin\alpha - 8,61579 \cdot \cos\alpha = 0 \\ & \quad 0 = 0 \\ \sum M = 0 & \quad - 13,09430 - 20 + 33,09430 = 0 \\ & \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

### 5.2. Kontrola kinematyczna.

#### 5.2.1. Dowolny układ podstawowy:



Reakcje podporowe:  $V_A = V_B = 1/10 = 0,1 [1/m]$ ;  $H_B = 0$ ;

#### 5.2.2. Kąt obrotu punktu A:

$$\bar{1} \cdot \varphi_A = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx \approx 0$$

$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \varphi_A \cdot EI_0 = & 2/3 \cdot 6 \cdot 36 \cdot 0,5 \cdot 0,6 - 0,5 \cdot 33,09430 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 0,6 + \\ & 1/0,8 \cdot 2,5/6 \cdot (-2 \cdot 13,09430 \cdot 0,6 + 2 \cdot 8,44518 \cdot 0,6 - 13,09430 \cdot 0,6 + \\ & 8,44518 \cdot 0,6 - 2 \cdot 13,09430 \cdot 0 + 2 \cdot 8,44518 \cdot 0,2 - 13,09430 \cdot 0,2 + \\ & 8,44518 \cdot 0 + 2 \cdot 8,44518 \cdot 0,8 - 2 \cdot 7,51535 \cdot 0,8 + 8,44518 \cdot 0,8 - \\ & 7,51535 \cdot 0,8 + 2 \cdot 8,44518 \cdot 0 - 2 \cdot 7,51535 \cdot 0,2 + 8,44518 \cdot 0,2 - \\ & 7,51535 \cdot 0) = \mathbf{0,00000000000056 \text{ kNm}^2} = \mathbf{5,6 \cdot 10^{-13} \text{ kNm}^2} \end{aligned}$$

Z warunku decydującego wytrzymałości mamy:  $\max|\sigma_x| \leq R$

$$\sigma_x = \frac{|M_{ekstr}|}{W} \leq R = 215 \text{ MPa} = 21,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$M_{ekstr} = -33,09430 \text{ kNm} = -3309,43 \text{ kNcm}$$

$$W \geq \frac{|M_{ekstr}|}{R} = \frac{|-3309,43|}{21,5} = 154 \text{ cm}^3$$

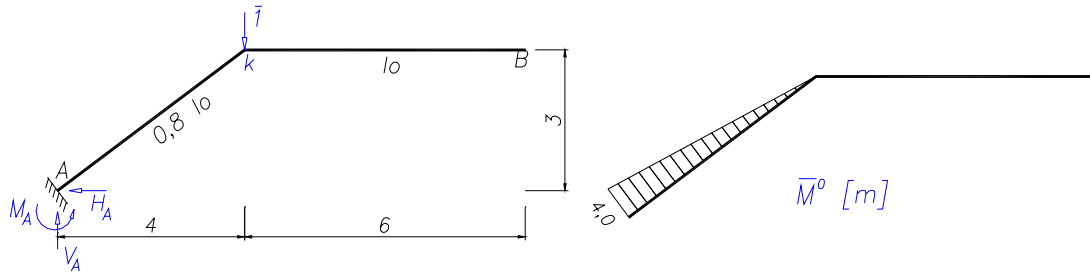
Dobrano dwuteownik typu 180 ( $W_x = 161 \text{ cm}^3$   $I_x = 1450 \text{ cm}^4 = I_0$ )

$$EI_0 = 205 \cdot 10^9 \cdot 1450 \cdot 10^{-8} = 2972500 \text{ Nm}^2 = 2972,5 \text{ kNm}^2$$

$$\bar{1} \cdot \varphi_A = \frac{5,6 \cdot 10^{-13}}{EI_o} \left[ \frac{kNm^2}{kNm^2} = rad \right] = \frac{5,6 \cdot 10^{-13}}{2972,5} = 1,9 \cdot 10^{-16} rad \approx 0$$

## 6. Obliczenie pionowego przemieszczenia punktu K.

### 6.1. Obciążenie wirtualne (w układzie podstawowym).



### 6.2. Przemieszczenie punktu k:

$$\bar{1} \cdot \delta_K = \sum \int_0^l \frac{M_P \bar{M}}{EI} dx$$

$$\bar{1} \cdot v_K \cdot EI_o = 1/0,8 \cdot 2,5/6 \cdot (2 \cdot 13,09430 \cdot 0 - 2 \cdot 8,44518 \cdot 2,0 + 13,09430 \cdot 2,0 - 8,44518 \cdot 0 - 2 \cdot 8,44518 \cdot 2,0 + 2 \cdot 7,51535 \cdot 4,0 - 8,44518 \cdot 4,0 + 7,51535 \cdot 2) = -0,0000000000015 kNm^3 = -1,5 \cdot 10^{-12} kNm^3$$

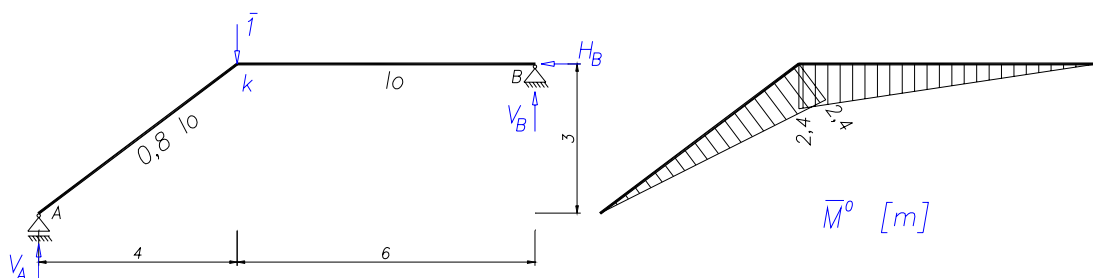
Dla dwuteownika typu 180 ( $W_x = 161 \text{ cm}^3$   $I_x = 1450 \text{ cm}^4 = I_o$ )

$$EI_o = 205 \cdot 10^9 \cdot 1450 \cdot 10^{-8} = 2972500 \text{ Nm}^2 = 2972,5 \text{ kNm}^2$$

$$\bar{1} \cdot v_K = \frac{\bar{1} \cdot v_K}{EI_o} \left[ \frac{kNm^3}{kNm^2} = m \right] = \frac{-1,5 \cdot 10^{-12}}{2972,5} = 5,0 \cdot 10^{-16} \text{ m} \approx 0$$

### 6.3. Sprawdzenie.

#### 6.3.1. Obciążenie wirtualne (w innym układzie podstawowym).



$$\begin{aligned} \text{Reakcje podporowe: } \sum M_B = 0 & \quad V_A \cdot 10 - 1 \cdot 6 = 0; & \quad V_A = 0,6 \text{ m;} \\ \sum Y = 0 & \quad V_B = 0,4 \text{ m;} \\ \sum X = 0 & \quad H_B = 0; \end{aligned}$$

$$\bar{1} \cdot v_K \cdot EI_o = 2/3 \cdot 6 \cdot 36 \cdot 0,5 \cdot 2,4 - 0,5 \cdot 33,09430 \cdot 6 \cdot 2/3 \cdot 2,4 + 1/0,8 \cdot 2,5/6 \cdot (-2 \cdot 13,09430 \cdot 2,4 + 2 \cdot 8,44518 \cdot 1,2 - 13,09430 \cdot 1,2 + 8,44518 \cdot 2,4 + 2 \cdot 8,44518 \cdot 1,2 - 2 \cdot 7,51535 \cdot 0 + 8,44518 \cdot 0 - 7,51535 \cdot 1,2) = 0,00000000000074 kNm^3 = 7,4 \cdot 10^{-13} kNm^3$$

Dla dwuteownika typu 180 ( $W_x = 161 \text{ cm}^3$   $I_x = 1450 \text{ cm}^4 = I_o$ )

$$EI_o = 205 \cdot 10^9 \cdot 1450 \cdot 10^{-8} = 2972500 \text{ Nm}^2 = 2972,5 \text{ kNm}^2$$

$$\bar{1} \cdot v_K = \frac{\bar{1} \cdot v_K}{EI_o} \left[ \frac{kNm^3}{kNm^2} = m \right] = \frac{7,4 \cdot 10^{-13}}{2972,5} = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ m} \approx 0$$