

Politechnika Poznańska

Instytut analizykonstrukcji

Zakład Mechaniki Budowli



# Ćwiczenie projektowe nr 2

Metoda sił

Prowadzący: mgr inż. Anita Kaczor

Autor: Stanisław Cwojdzński

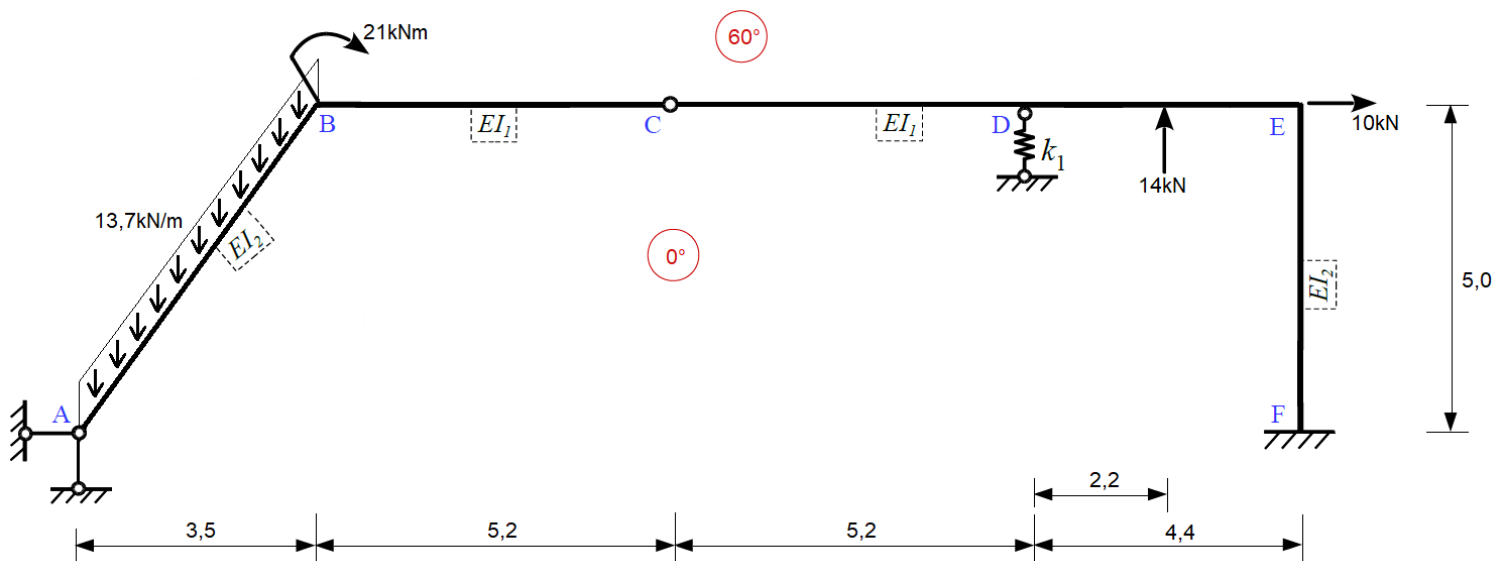
Semestr: 3

Nr indeksu: 148497

Rok: 2022/2023

# 1. Analiza układu

Schemat układu:



Stopień statycznej niewyznaczalności układu:

$$SSN = w - 3t$$

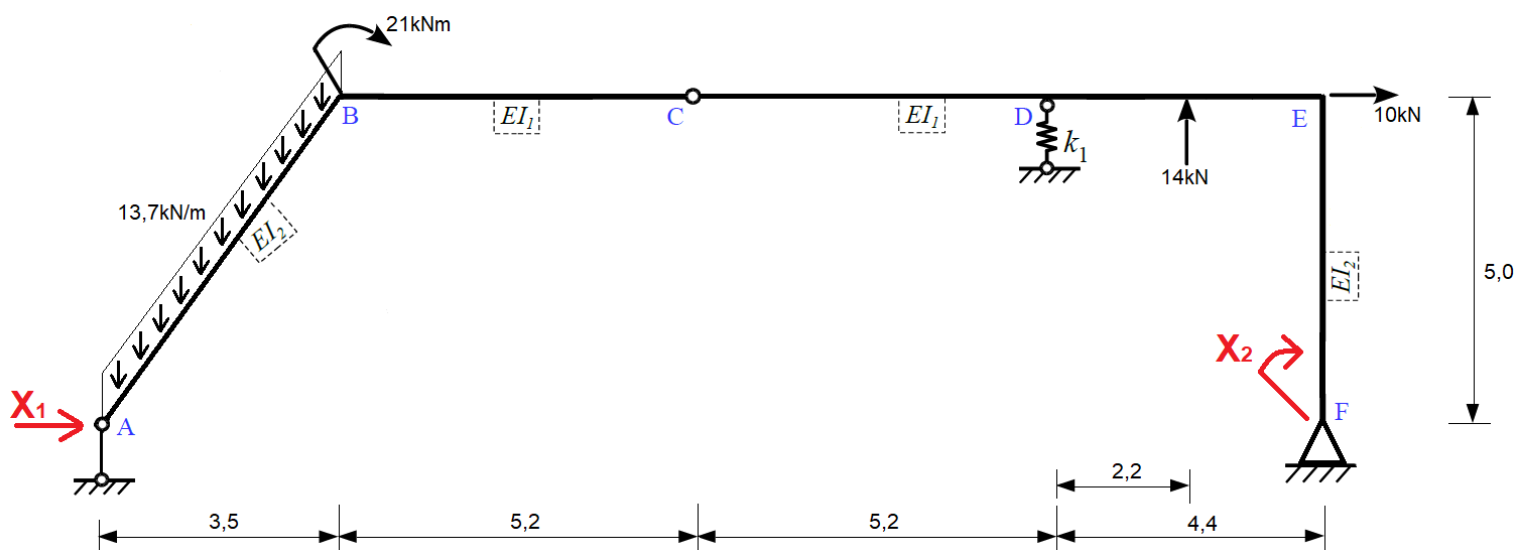
$$w = 3 + 1 + 2 + 1 + 1 = 8$$

$$t = 2$$

$$SSN = 8 - 3 \cdot 2 = 2$$

Rama jest więc dwukrotnie statycznie niewyznaczalna.

# 2. Układ podstawowy



### 3. Przyjęcie przekrojów prętów

- Moduł Young'a:  $E = 210 \text{ GPa}$
- Przekrój 1- I 200 PE:  $I_1 = 1940 \text{ cm}^4$
- Przekrój 2- I 240 PE:  $I_1 = 3890 \text{ cm}^4$

$$EI_1 = 210 \cdot 10^6 \cdot 1940 \cdot 10^{-8} = 4074,0 \text{ kNm}^2$$

$$EI_2 = 210 \cdot 10^6 \cdot 3890 \cdot 10^{-8} = 8169,0 \text{ kNm}^2$$

Do rozwiązania zadania przyjmuję:

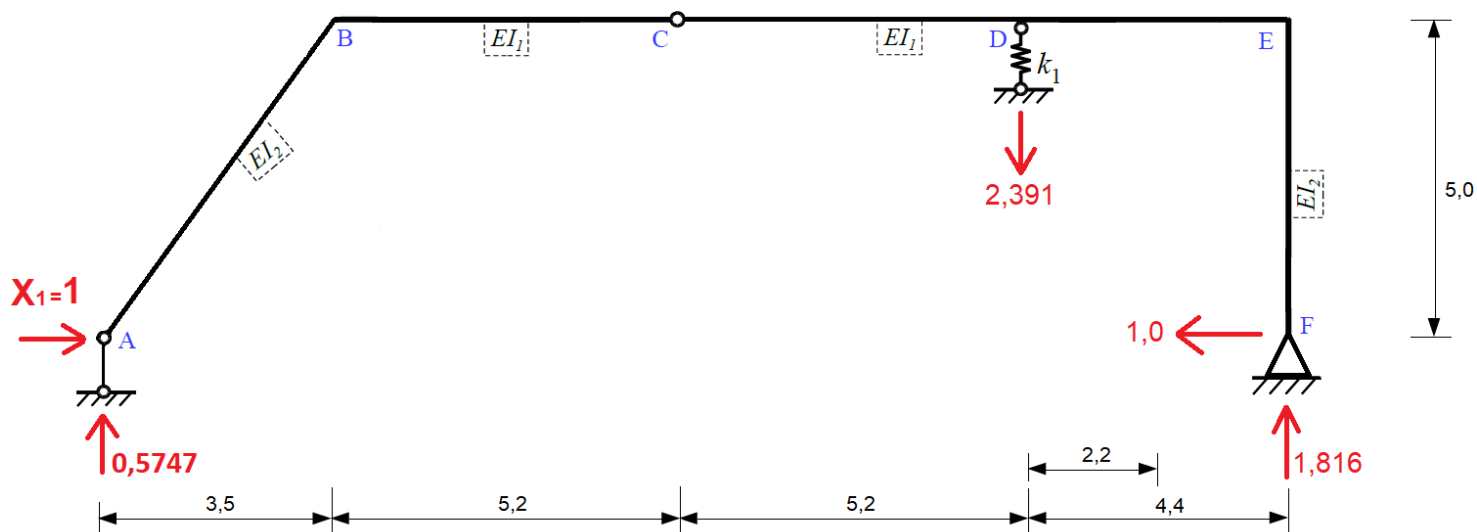
$$EI_1 = EI$$

$$EI_2 = 2,005EI$$

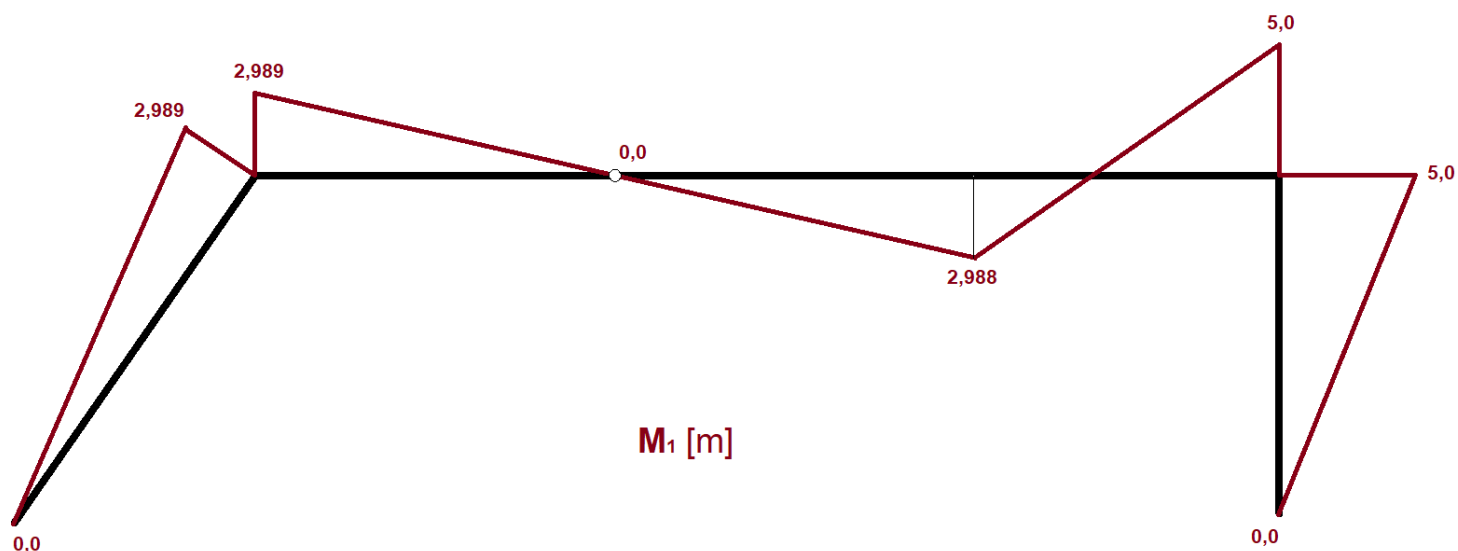
$$k = 1,105EI$$

$$|AB| = 6,103m$$

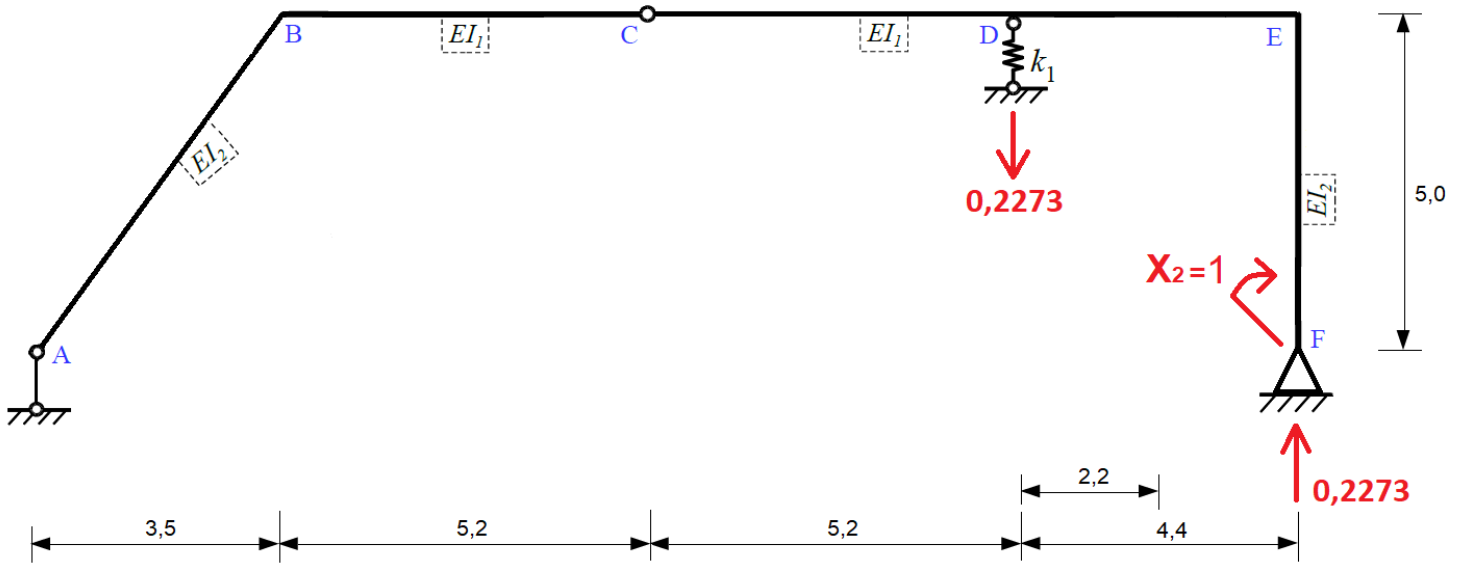
### 4. Stan $x_1 = 1$



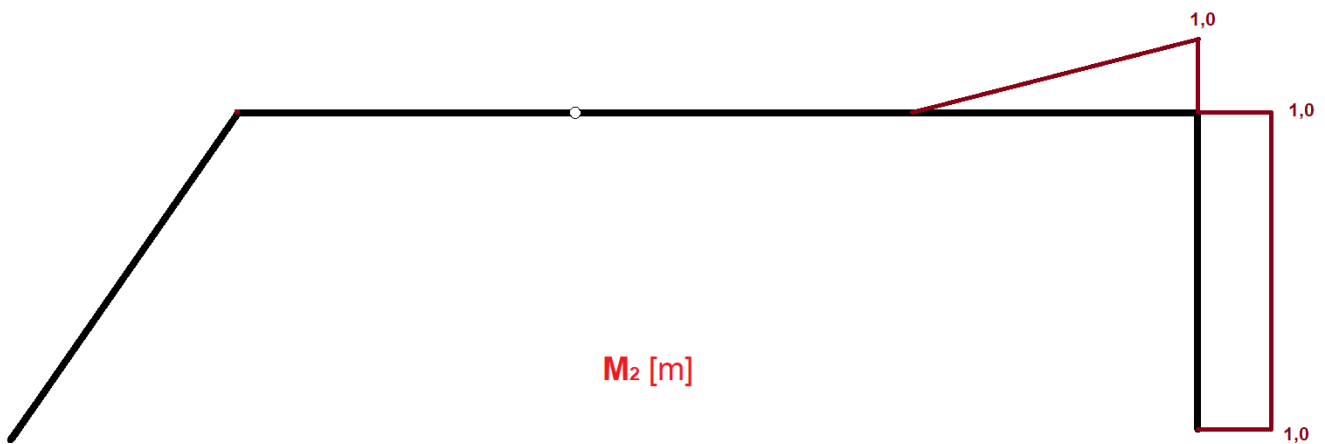
Wykres momentów zginających:



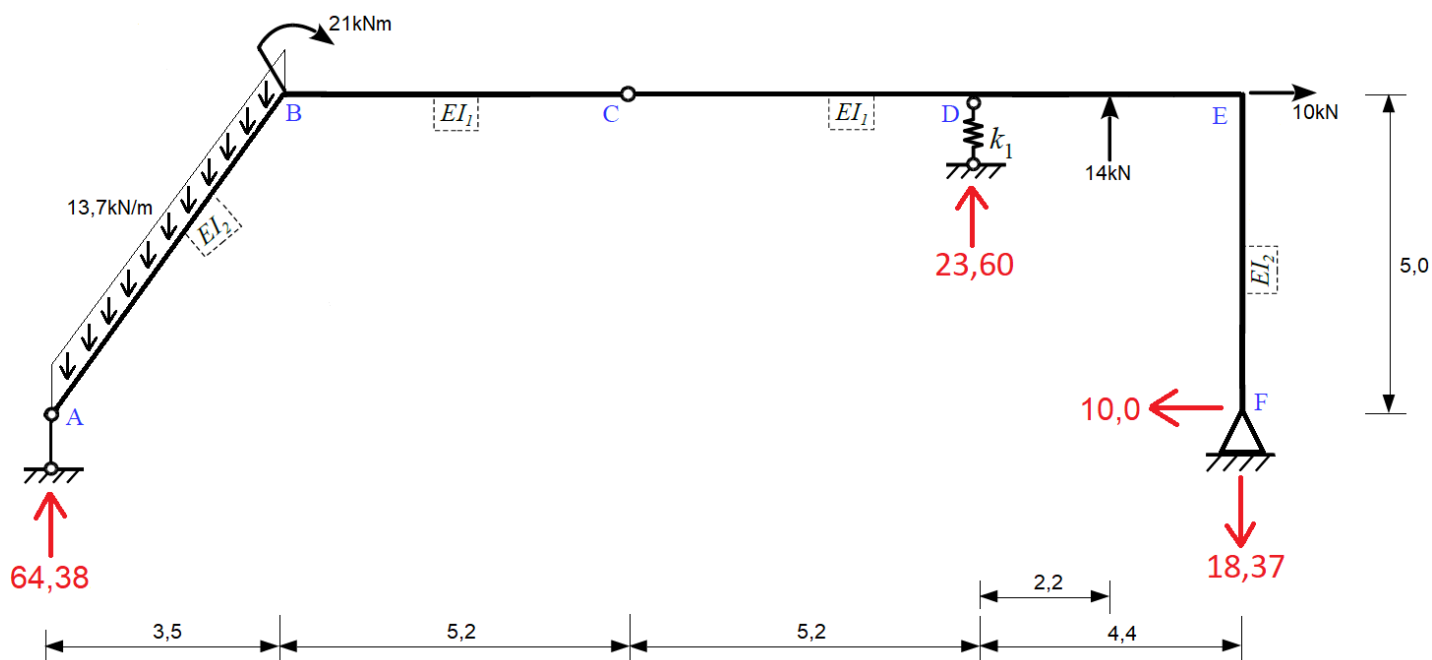
5. Stan  $x_2 = 1$



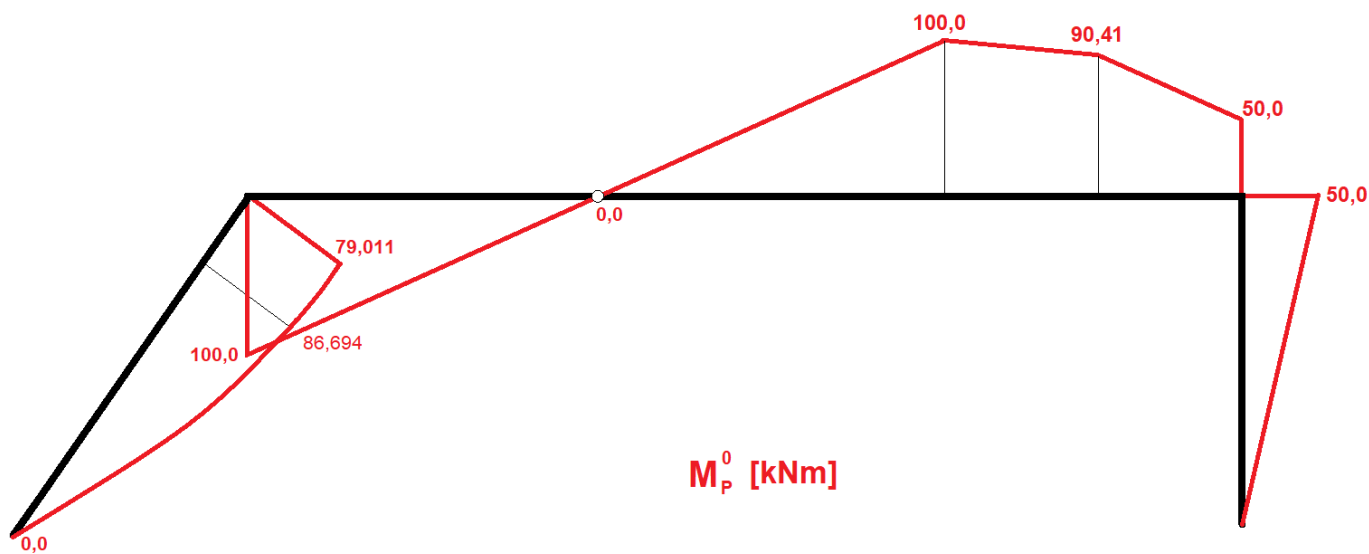
Wykres momentów zginających:



## 6. Stan „P”



Wykres momentów zginających:



## 7. Układ równań kanonicznych

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \int_s \frac{M_1 M_1}{EI} ds + \frac{R_1^D \cdot R_1^D}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,989 \cdot 6,103 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,989}{EI_2} + \\
&\frac{\frac{1}{2} \cdot 2,989 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,989 + \frac{1}{2} \cdot 2,988 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,988 + \frac{1}{2} \cdot 2,988 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,988 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4,4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2,988 + \frac{1}{2} \cdot 2,988 \cdot 4,4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 5}{EI_1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{EI_2} + \frac{2,391 \cdot 2,391}{1,105EI} \\
&= \frac{58,81}{EI_1} + \frac{59,84}{EI_2} + \frac{5,717}{1,105EI} = \frac{58,81}{EI} + \frac{59,84}{2,005EI} + \frac{5,717}{1,105EI} = \frac{93,83}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{22} &= \int_s \frac{M_2 M_2}{EI} ds + \frac{R_2^D \cdot R_2^D}{k} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{EI_1} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 1}{EI_2} + \frac{0,2273 \cdot 0,2273}{1,105EI} \\
&= \frac{1,467}{EI_1} + \frac{5}{EI_2} + \frac{0,05167}{1,105EI} = \frac{1,467}{EI} + \frac{5}{2,005EI} + \frac{0,05167}{1,105EI} = \frac{4,007}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{12} = \delta_{21} &= \int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds + \frac{R_1^D \cdot R_2^D}{k} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2,988 \cdot 4,4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1}{EI_1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1}{EI_2} + \frac{0,2273 \cdot 2,391}{1,105EI} \\
&= \frac{5,142}{EI_1} + \frac{12,5}{EI_2} + \frac{0,5435}{1,105EI} = \frac{5,142}{EI} + \frac{12,5}{2,0052EI} + \frac{0,5435}{1,105EI} = \frac{11,87}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{1P} &= \int_s \frac{M_1 M_P}{EI} ds + \frac{R_1^D \cdot R_P^D}{k} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot 79,01 \cdot 6,103 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2,989 + \frac{2}{3} \cdot \frac{13,7 \cdot 6,103 \cdot 3,5}{8} \cdot 6,103 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2,989}{EI_2} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 100,0 \cdot 5,2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2,989 + \frac{1}{2} \cdot 100,0 \cdot 5,2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2,988 + \frac{1}{2} \cdot 100,011 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2,988}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 90,41 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2,988 + \frac{1}{2} \cdot 100,0 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 90,41 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 90,41 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 90,41 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{EI_2} + \frac{-2,391 \cdot 23,6}{1,105EI} = \frac{-816,6}{EI_1} + \frac{-286,2}{EI_2} + \frac{-56,43}{1,105EI} = \frac{-816,6}{EI} + \frac{-286,2}{2,005EI} + \frac{-56,43}{1,105EI} \\
&= \frac{-1010}{EI}
\end{aligned}$$

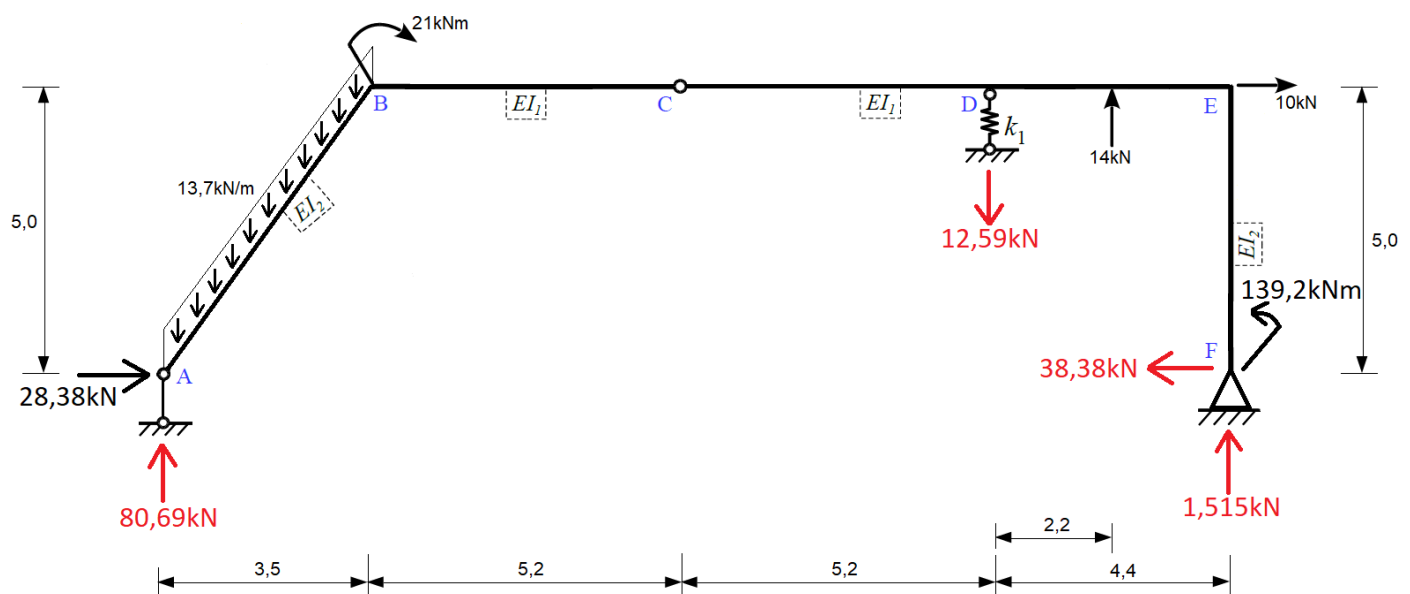
$$\begin{aligned}
\delta_{2P} &= \int_s \frac{M_2 M_P}{EI} ds + \frac{R_2^D \cdot R_1^D}{k} = \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot 100,0 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 90,41 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 90,41 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 90,41 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1}{EI_1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 5 \cdot 1}{EI_2} \\
&+ \frac{-0,2273 \cdot 23,6}{1,105EI} = \frac{163,6}{EI_1} + \frac{125}{EI_2} + \frac{-5,364}{1,105EI} = \frac{163,6}{EI} + \frac{125}{2,005EI} + \frac{-5,364}{1,105EI} = \frac{221,1}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\frac{93,83}{EI} X_1 + \frac{11,87}{EI} X_2 + \frac{-1010}{EI} = 0 \\
\frac{11,87}{EI} X_1 + \frac{4,007}{EI} X_2 + \frac{221,1}{EI} = 0
\end{cases}$$

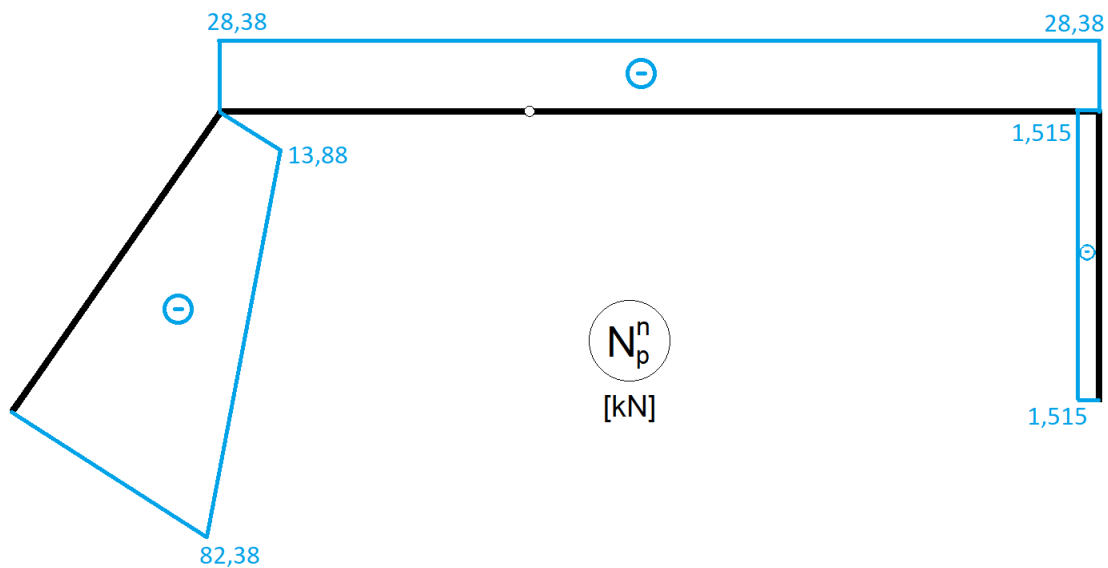
$$\begin{cases}
X_1 = 28,38 \text{ kN} \\
X_2 = -139,2 \text{ kNm}
\end{cases}$$

## 8. Wyznaczenie sił wewnętrznych

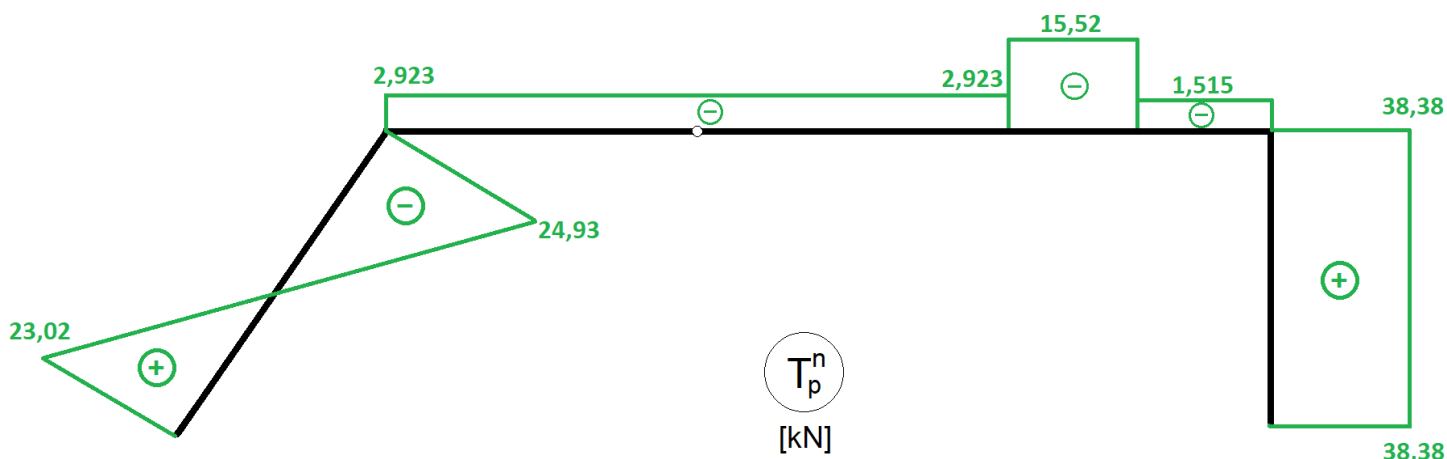
Układ:



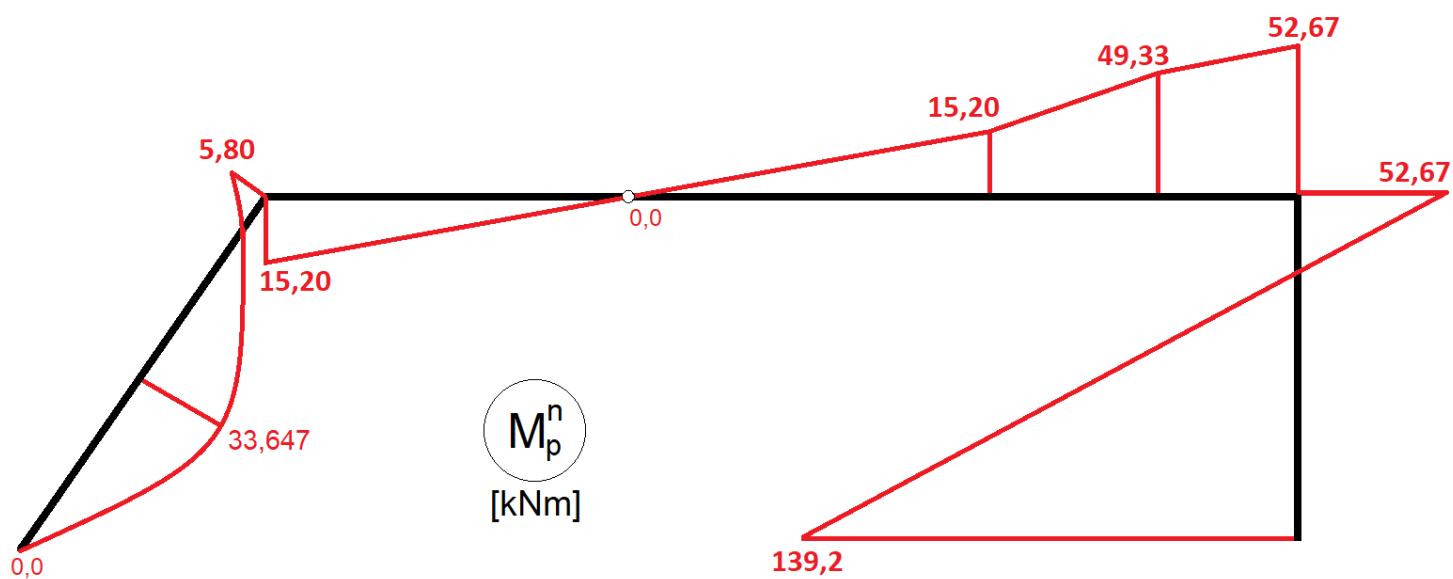
Wykres sił normalnych:



Wykres sił tnących:



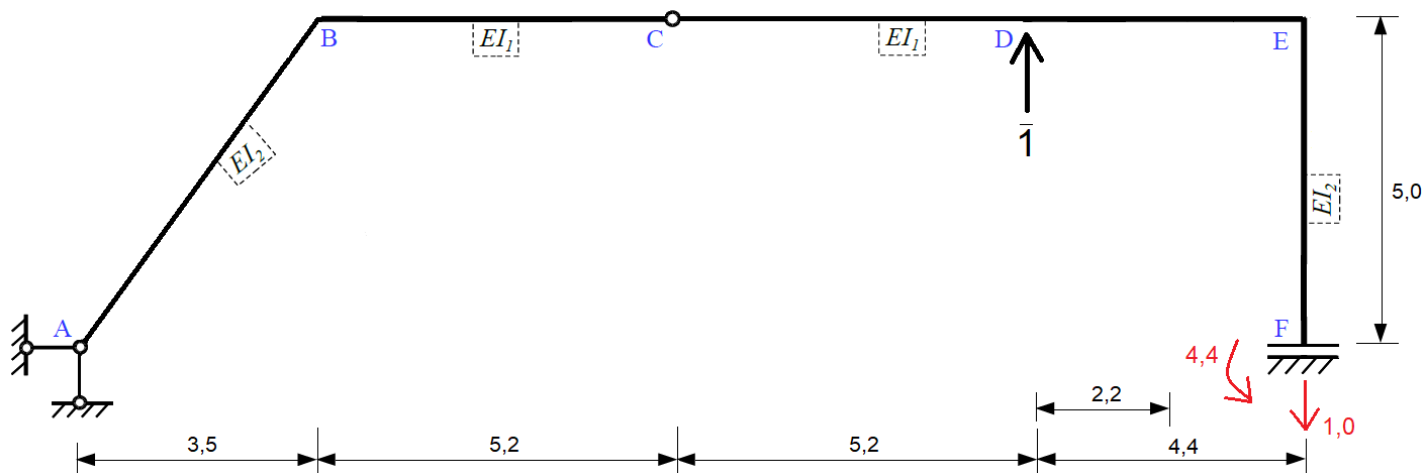
Wykres momentów zginających:



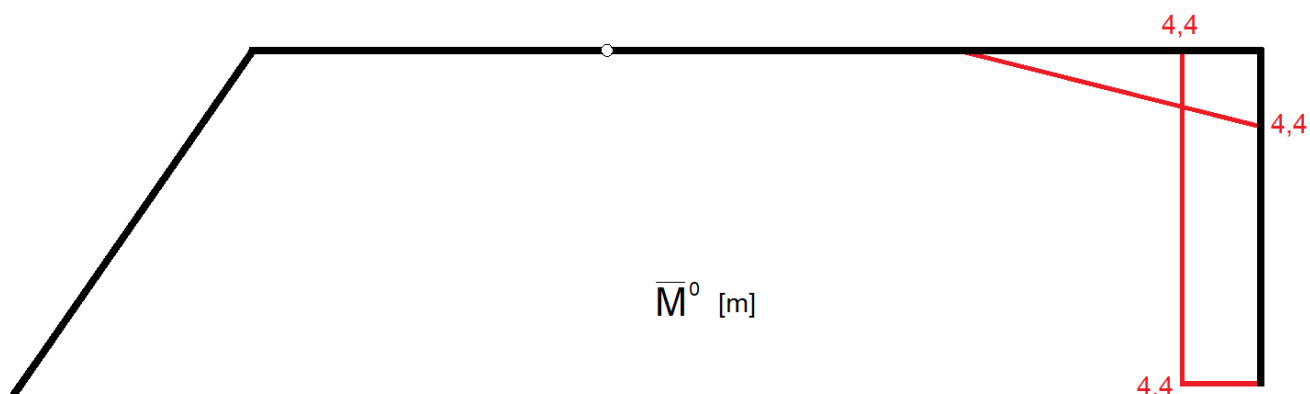


## 9. Sprawdzenie kinematyczne

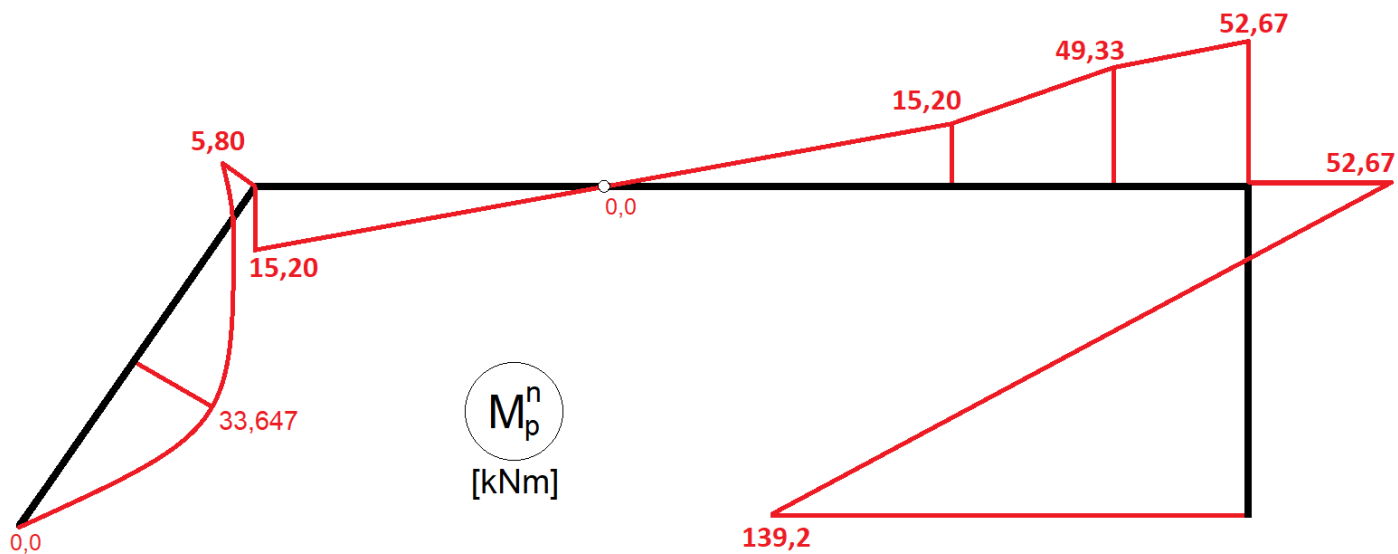
Przyjęty schemat i obciążenie:



Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego:



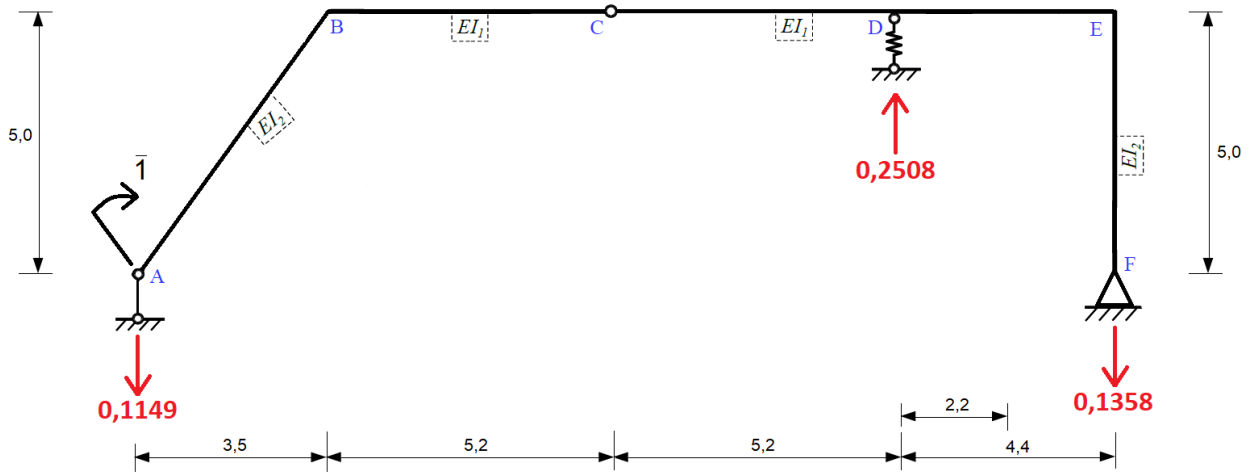
Wykres momentów zginających od obciążenia rzeczywistego:



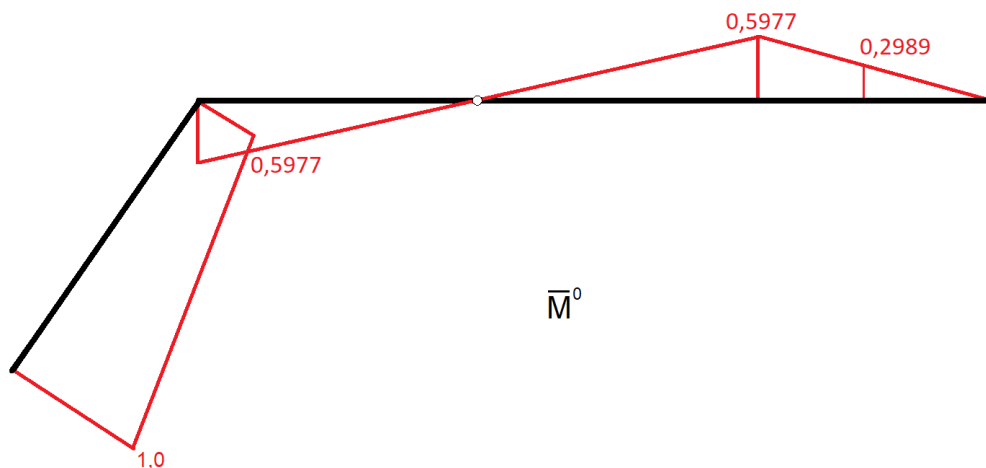
$$\begin{aligned}
V_D \cdot \bar{1} &= \int_s \frac{\bar{M}^0 M_P^n}{EI} ds + \frac{R_P^n \cdot \bar{R}^0}{k} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot 52,67 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 4,4 + \frac{1}{2} \cdot 52,67 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2,2 + \frac{1}{2} \cdot 49,33 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2,2}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 49,33 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 4,4 + \frac{1}{2} \cdot 49,33 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2,2 + \frac{1}{2} \cdot 15,20 \cdot 2,2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2,2}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 139,20 \cdot 5 \cdot 4,4 + \frac{1}{2} \cdot 52,67 \cdot 5 \cdot (-4,4)}{EI_2} - \frac{1 \cdot 12,59}{1,105EI} = \frac{951,83}{EI_2} - \frac{463,45}{EI_1} - \frac{12,59}{1,105EI} \\
&= \frac{951,83}{2,005EI} - \frac{463,45}{EI} - \frac{12,59}{1,105EI} = \frac{-0,1155}{EI} \\
|V_D| &< \frac{1}{EI} \Rightarrow V_D \approx 0
\end{aligned}$$

10. Obliczenie obrotu w pkt. A wywołanego działaniem sił zewnętrznych z wykorzystaniem twierdzenia redukcyjnego.

$$\varphi_A \cdot \bar{1} = \sum \int_s \frac{M_P^n \bar{M}^0}{EI} ds + \frac{R_P^n \cdot \bar{R}^0}{k}$$



Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego:



$$\begin{aligned}
\varphi_A \cdot \bar{1} &= \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot 5,80 \cdot 6,103 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0,5977 + \frac{1}{2} \cdot 5,80 \cdot 6,103 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{13,7 \cdot 6,103 \cdot 3,5}{8} \cdot 6,103 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{EI_2} \\
&+ \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{13,7 \cdot 6,103 \cdot 3,5}{8} \cdot 6,103 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5977}{EI_2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 15,20 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{2} \cdot 15,2 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 15,2 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{2} \cdot 15,2 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,2989 + \frac{1}{2} \cdot 49,33 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5977}{EI_1} \\
&+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 49,33 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,2989 + \frac{1}{2} \cdot 49,33 \cdot 2,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,2989 + \frac{1}{2} \cdot 52,67 \cdot 2,2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,2989}{EI_1} = \\
&= \frac{106,0}{EI_2} + \frac{78,03}{EI_1} - \frac{0,2508 \cdot 12,59}{4500} = \frac{106,0}{8169,0} + \frac{78,03}{4074,0} - \frac{3,158}{4500} = \mathbf{0,03142 \text{ rad}}
\end{aligned}$$

## 11. Sprawdzenie naprężeń w przekrojach

$$\sigma = \frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{w}$$

Przyjęte przekroje:

Przekrój 1 - I 200 PE:  $I_1 = 1940 \text{ cm}^4$ ,  $w_1 = 194 \text{ cm}^3$ ,  $A_1 = 28,5 \text{ cm}^2$ ;

Przekrój 2 - I 240 PE:  $I_2 = 3890 \text{ cm}^4$ ,  $w_2 = 324 \text{ cm}^3$ ,  $A_2 = 39,1 \text{ cm}^2$ .

Przekrój 1:

$$\sigma = \frac{28,38 \cdot 10^{-3}}{28,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{52,67 \cdot 10^{-3}}{194 \cdot 10^{-6}} = 281,5 \text{ MPa}$$

$$281,5 \text{ MPa} > 215 \text{ MPa}$$

$$\sigma > \sigma_{dop}$$

Przekrój 2:

$$\sigma = \frac{1,515 \cdot 10^{-3}}{39,1 \cdot 10^{-4}} + \frac{139,2 \cdot 10^{-3}}{324 \cdot 10^{-6}} = 430,0 \text{ MPa}$$

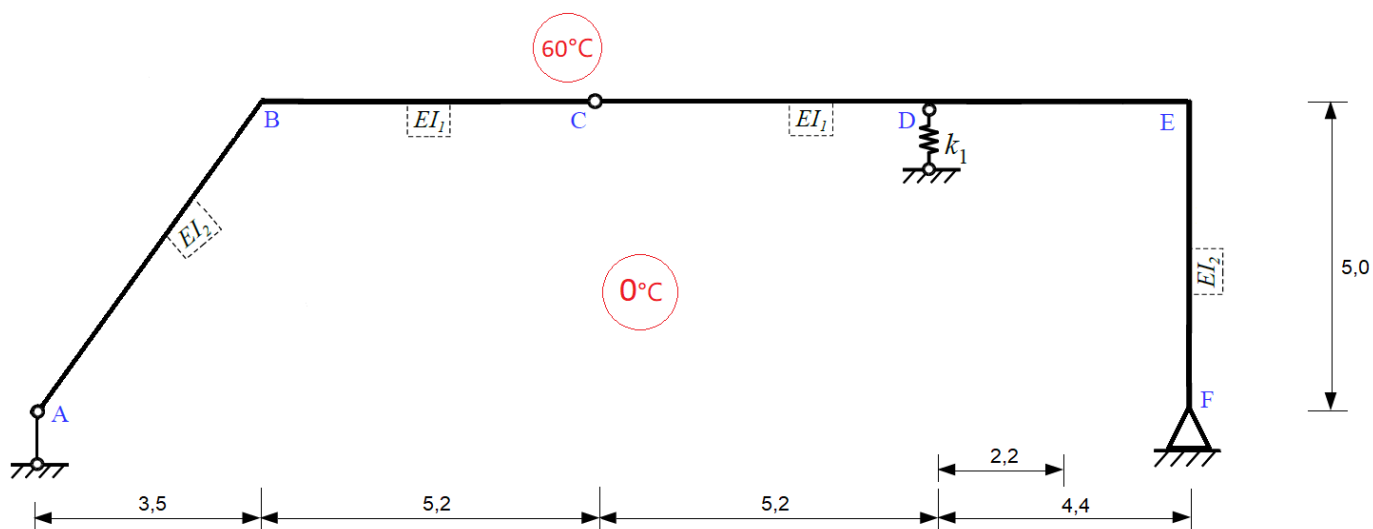
$$430,0 \text{ MPa} > 215 \text{ MPa}$$

$$\sigma > \sigma_{dop}$$

Wnioski:

Naprężenia w obu grupach przekrojów ( $I_1, I_2$ ) zdecydowanie przekraczają wartości dopuszczalnych naprężeń (215MPa). Należy przyjąć inne, większe przekroje z odpowiednio większą nośnością, tak aby zmieścić się w zadanej tolerancji, wyznaczyć od nowa rozkład momentów zginających i ponownie sprawdzić naprężenia dla obu grup prętów.

## 12. Obliczenie sił przekrojowych od wpływu temperatury

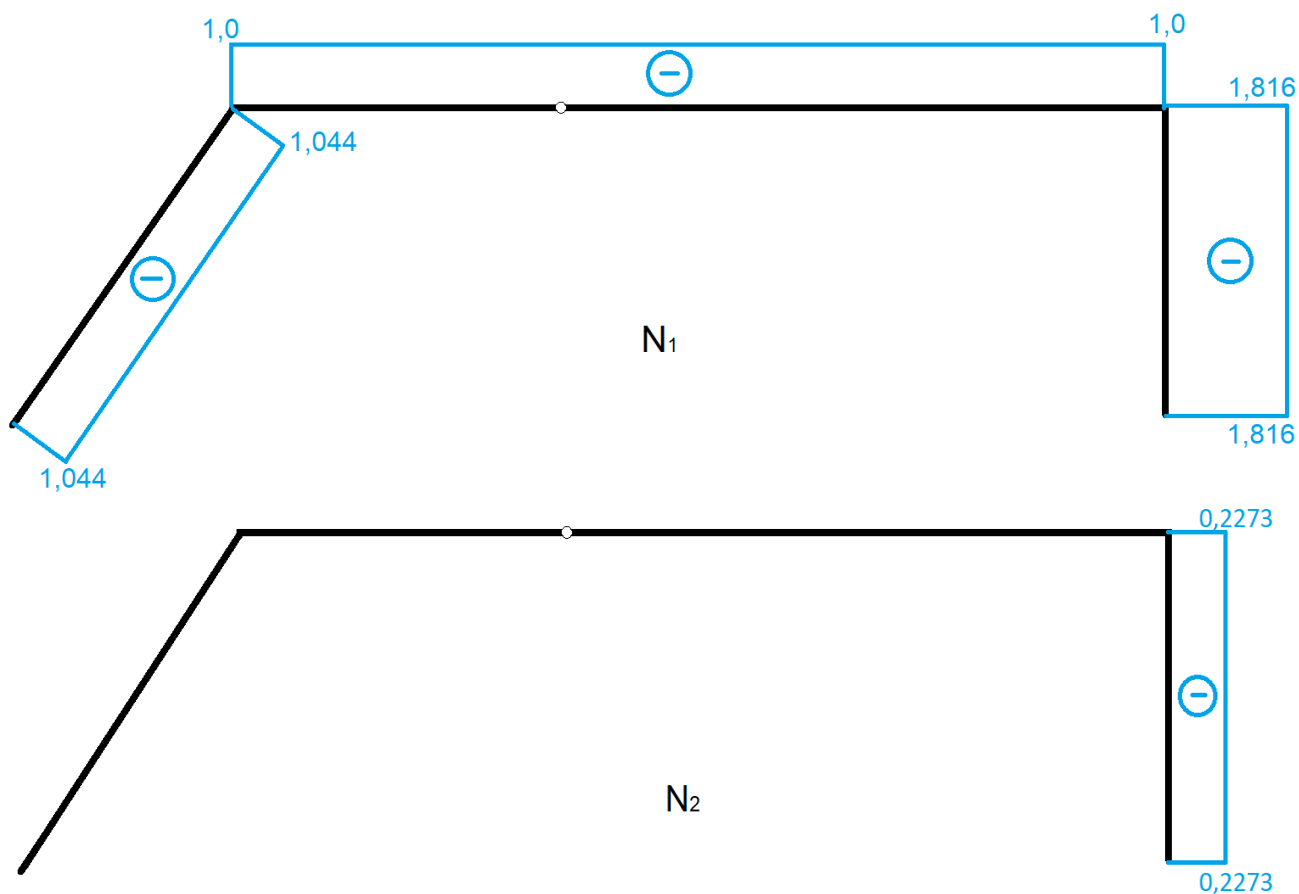


Wykresy momentów zginających w stanach jednostkowych – jak poprzednio (pkt. 4 i 5).

Macierz podatności – bez zmian:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{93,83}{EI} & \frac{11,87}{EI} \\ \frac{11,87}{EI} & \frac{4,007}{EI} \end{bmatrix}$$

Wykresy sił normalnych  $N_1$  i  $N_2$ :



Obliczenie współczynników  $\delta_{iT}$ :

$$\delta_{iT} = \sum \int M_i \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} dx + \sum \int N_i \cdot \alpha_t \cdot t_0 dx$$

$$\Delta t = 60^\circ\text{C}, t_0 = 1^\circ\text{C}, t_m = 29^\circ\text{C}, h_1 = 0,2\text{m}, h_2 = 0,24\text{m}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1T} &= 1,2 \cdot 10^{-5} \left( \frac{60}{0,24} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,989 \cdot 6,103 + \frac{60}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,989 \cdot 5,2 - \frac{60}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,988 \cdot 5,2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{60}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,988 \cdot 4,4 + \frac{60}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4,4 + \frac{60}{0,24} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \right) \\ &\quad + 1,2 \cdot 10^{-5} (1 \cdot (-1,044) \cdot 6,103 + 1 \cdot (-1) \cdot 14,8 + 1 \cdot (-1,816) \cdot 5) \\ &= \mathbf{0,08043\ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{2T} &= 1,2 \cdot 10^{-5} \left( \frac{60}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 4,4 + \frac{60}{0,24} \cdot 1,0 \cdot 5 \right) + 1,2 \cdot 10^{-5} (1 \cdot (-0,2273) \cdot 5) \\ &= \mathbf{0,02291\ m} \end{aligned}$$

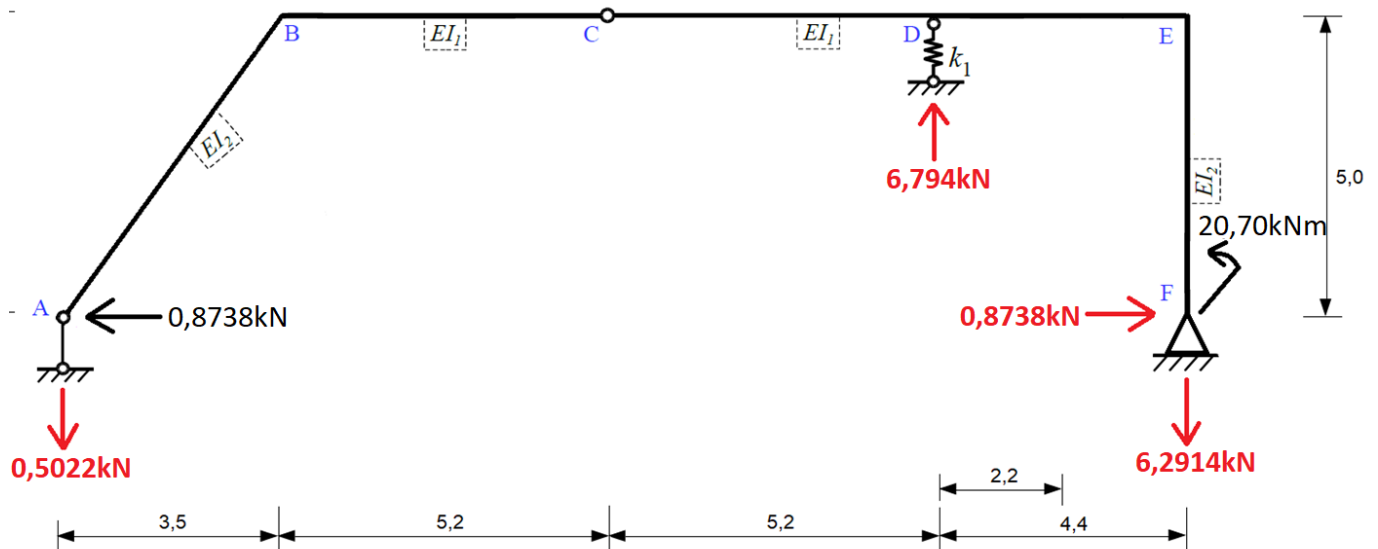
Obliczenie wartości niewiadomych  $X_1$  i  $X_2$ :

$$\begin{cases} \frac{93,83}{EI} X_1 + \frac{11,87}{EI} X_2 + 0,08043 = 0 \\ \frac{11,87}{EI} X_1 + \frac{4,007}{EI} X_2 + 0,02291 = 0 \end{cases}$$

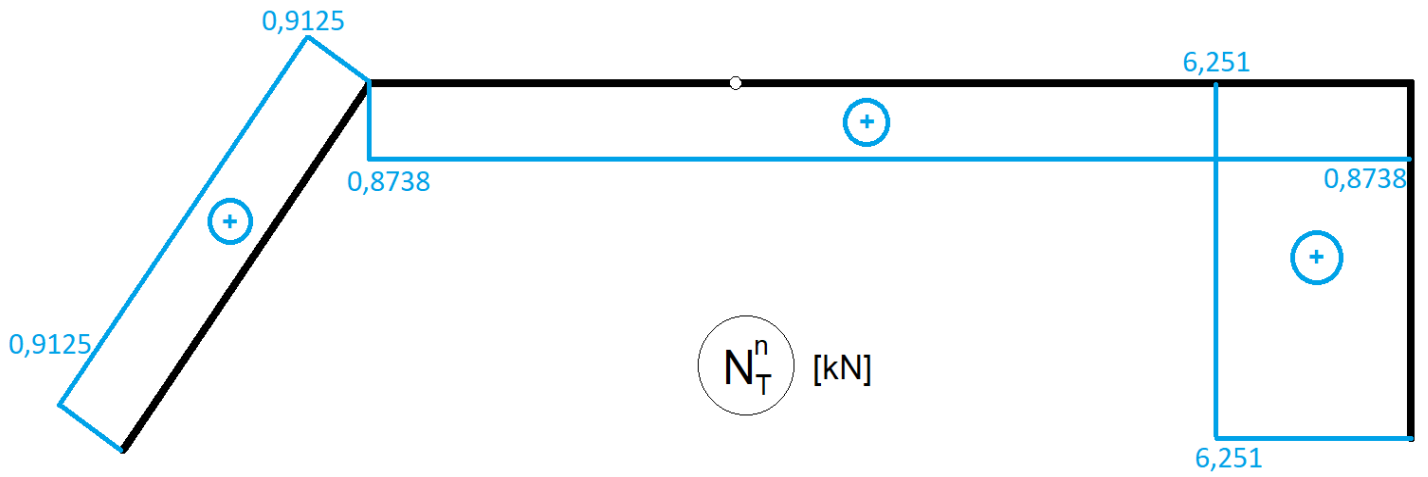
$$\begin{cases} 93,83X_1 + 11,87X_2 + 327,6718 = 0 \\ 11,87X_1 + 4,007X_2 + 93,3353 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \mathbf{-0,8738\ kN} \\ X_2 = \mathbf{-20,70\ kNm} \end{cases}$$

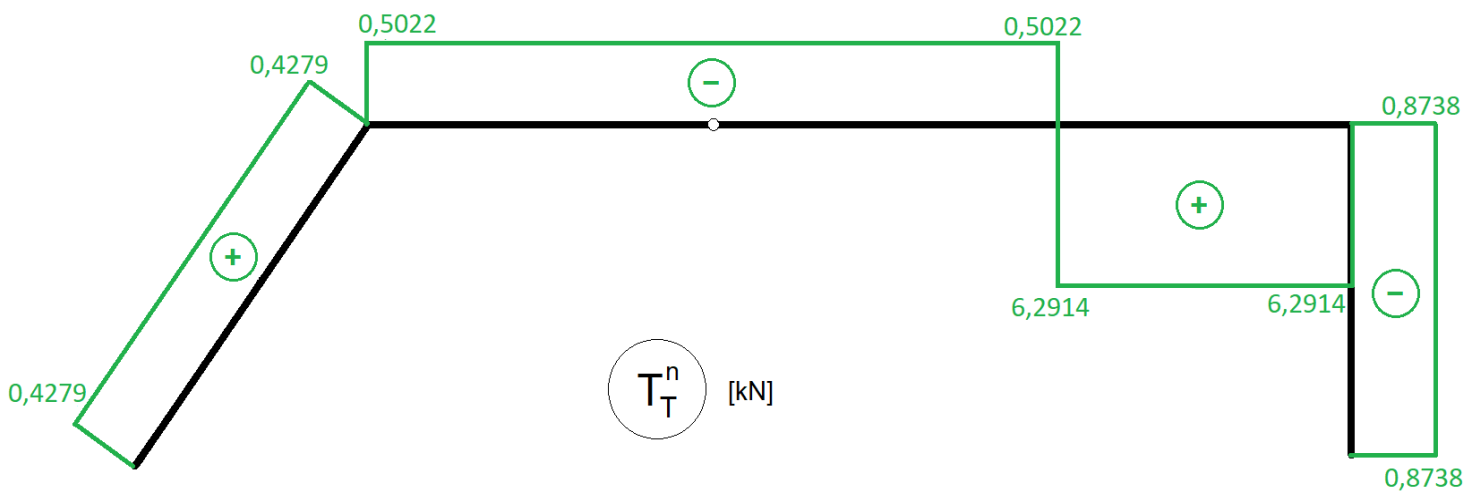
Układ:



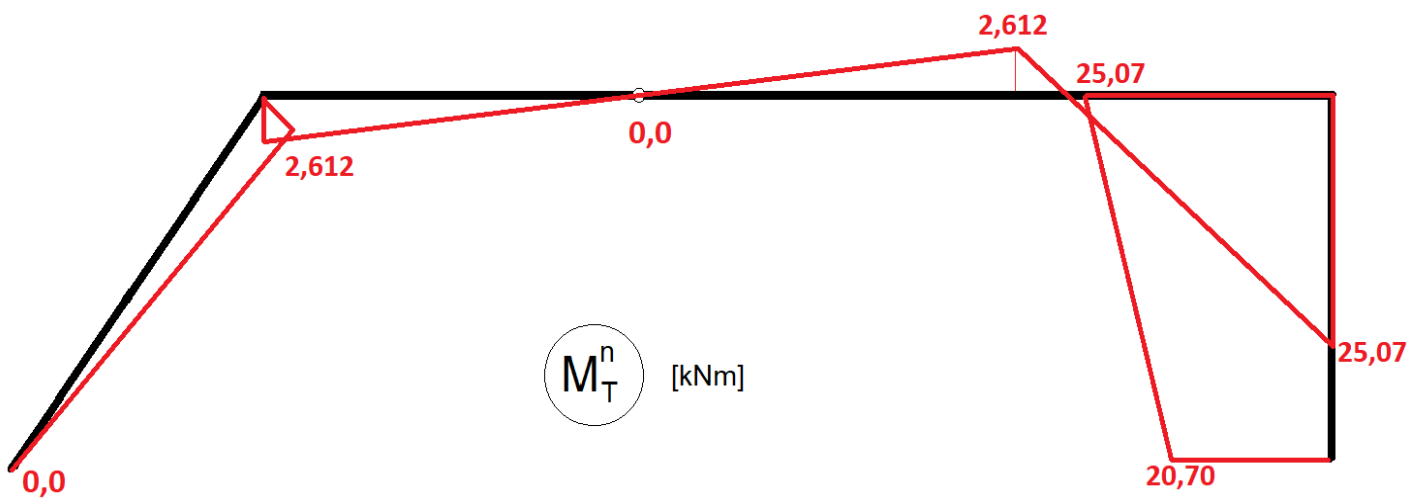
Wykres sił normalnych:



Wykres sił tnących:

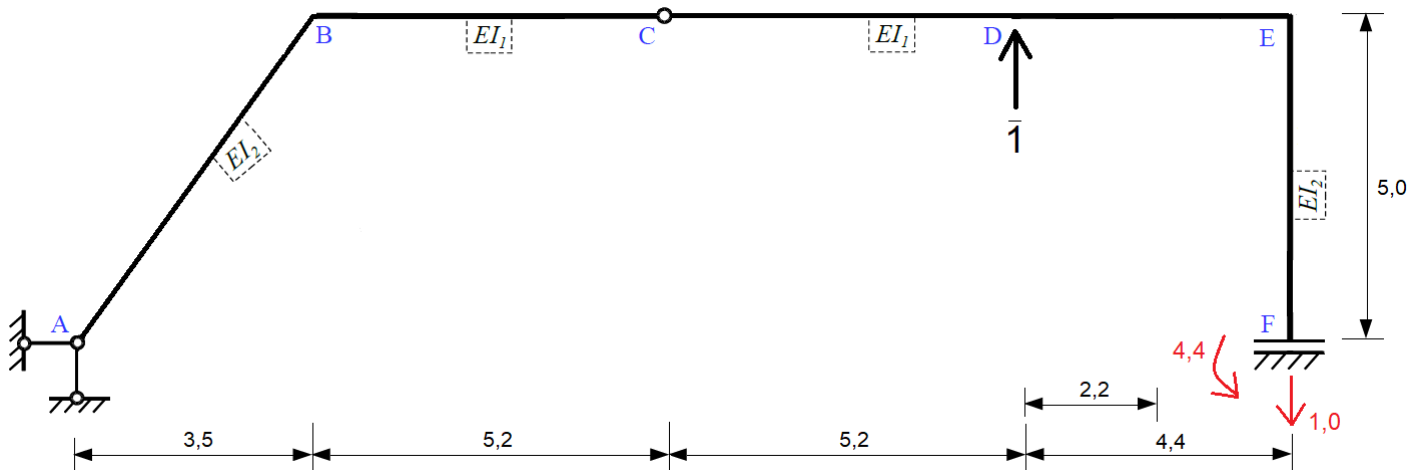


Wykres momentów zginających:

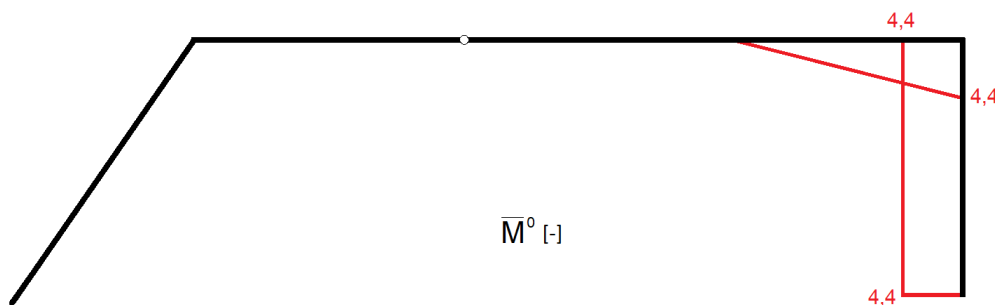


### 13. Sprawdzenie kinematyczne

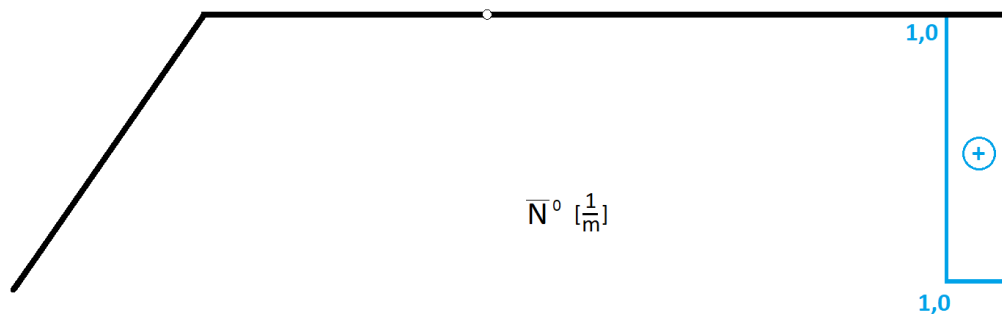
Przyjęty schemat i obciążenie (taki sam jak poprzednio):



Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego:



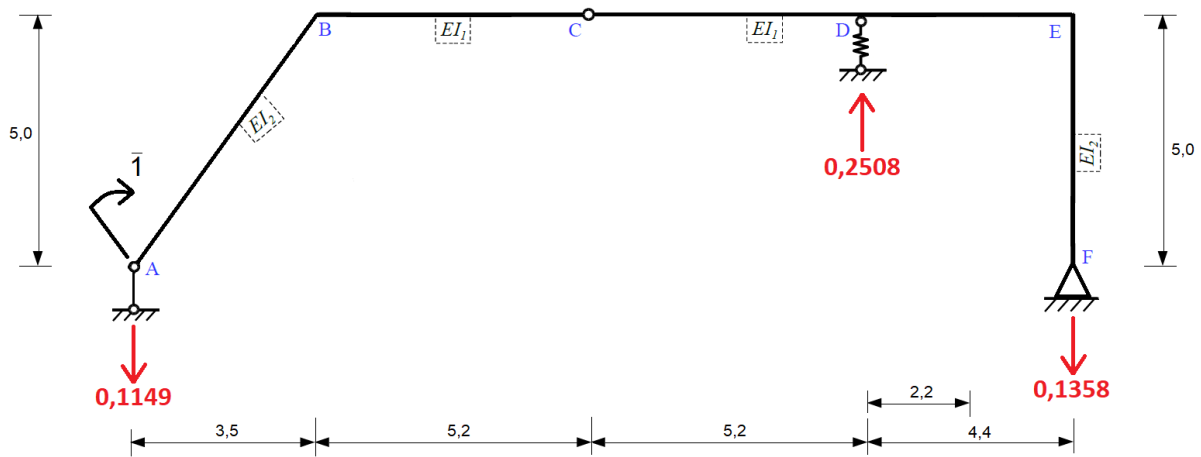
Wykres sił normalnych od obciążenia wirtualnego:



$$\begin{aligned}
 V_D \cdot \bar{1} &= \int_s \frac{\bar{M}^0 M_T^n}{EI} ds + \frac{R_T^n \cdot \bar{R}^0}{k} + \sum \int \bar{M}^0 \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} dx + \sum \int \bar{N}^0 \cdot \alpha_t \cdot t_0 dx = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,612 \cdot 4,4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 4,4 + \frac{1}{2} \cdot 25,07 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,4}{EI_1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 25,07 \cdot 5 \cdot 4,4 + \frac{1}{2} \cdot 20,7 \cdot 5 \cdot 4,4}{EI_2} \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 6,794}{4500} + 1,2 \cdot 10^{-5} \left( -\frac{60}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,4 \cdot 4,4 - \frac{60}{0,24} \cdot 4,4 \cdot 5 \right) + 1,2 \\
 &\quad \cdot 10^{-5} (1 \cdot 1 \cdot 5) = \frac{153,357}{EI} + \frac{503,47}{2,005EI} + \frac{6,794}{1,105EI} - \frac{0,100788 \cdot 4074}{EI} = \frac{0,0023}{EI}
 \end{aligned}$$

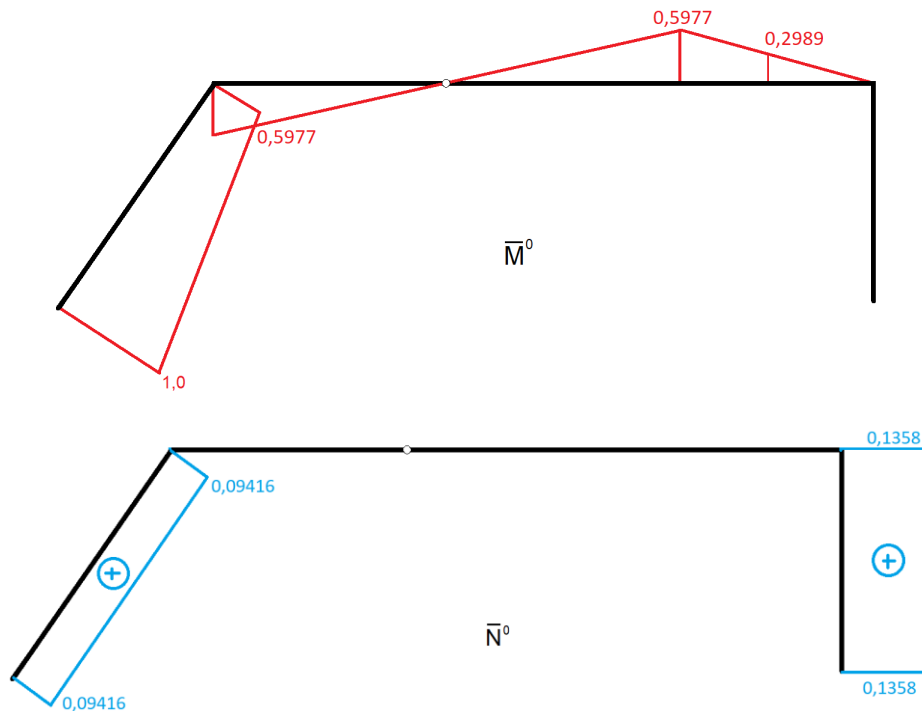
$$|V_D| < \frac{1}{EI} \Rightarrow V_D \approx 0$$

**Obliczenie obrotu w pkt. A od wywołanego wpływem rozkładu temperatur z wykorzystaniem twierdzenia redukcycznego.**



$$\varphi_A \cdot \bar{1} = \sum \int_S \frac{M_T^n \bar{M}^0}{EI} ds + \frac{R_T^n \cdot \bar{R}^0}{k} + \sum \int \bar{M}^0 \cdot \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} dx + \sum \int \bar{N}^0 \cdot \alpha_t \cdot t_0 dx$$

Wykres momentów zginających i siły normalnej od obciążenia wirtualnego:

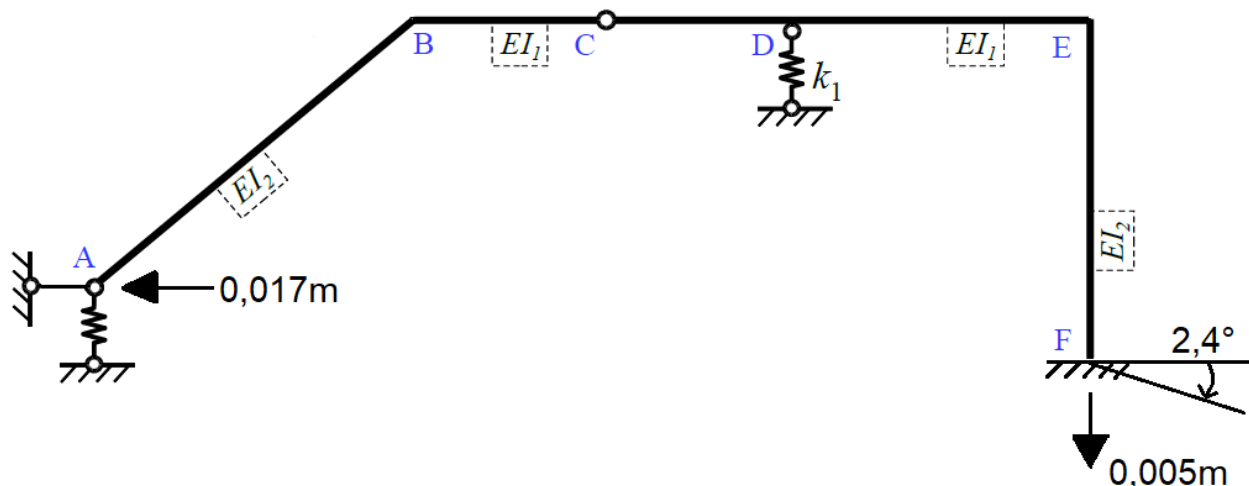


$$\begin{aligned} \varphi_A \cdot \bar{1} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,612 \cdot 6,103 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right)}{EI_2} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 2,612 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{2} \cdot 2,612 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{2} \cdot 2,612 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977}{EI_1} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 25,07 \cdot 4,4 \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot 0,5977}{EI_1} + \frac{0,2508 \cdot 6,794}{4500} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +1,2 \cdot 10^{-5} \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6,103 \cdot \frac{60}{0,24} - \frac{1}{2} \cdot 0,5977 \cdot 6,103 \cdot \frac{60}{0,24} - \frac{1}{2} \cdot 0,5977 \cdot 5,2 \cdot \frac{60}{0,2} + \frac{1}{2} \cdot 0,5977 \right. \\
& \quad \left. \cdot 5,2 \cdot \frac{60}{0,2} + \frac{1}{2} \cdot 0,5977 \cdot 4,4 \cdot \frac{60}{0,2} \right) + 1,2 \cdot 10^{-5} (0,09416 \cdot 6,103 \cdot 1 + 0,1358 \cdot 5 \cdot 1) \\
& = \frac{5,8328}{8169} + \frac{-3,2866}{4074} + \frac{1,704}{4500} - 0,00987732 = -0,009593 \text{ rad}
\end{aligned}$$

#### 14. Obliczanie sił przekrojowych od osiadania podpór



Macierz podatności i stany jednostkowe (ptk. 4 i 5)– bez zmian:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{93,83}{EI} & \frac{11,87}{EI} \\ \frac{11,87}{EI} & \frac{4,007}{EI} \end{bmatrix}$$

Obliczenie współczynników  $\delta_{i\Delta}$ :

$$\delta_{i\Delta} = - \sum R_i \cdot \Delta$$

$$\delta_{1\Delta} = - \sum R_1 \cdot \Delta = -(-1,816 \cdot 0,005 - 1 \cdot 0,017) = 0,02608m$$

$$\delta_{2\Delta} = - \sum R_2 \cdot \Delta = -(1 \cdot 0,04189 - 0,227 \cdot 0,005) = -0,04075m$$

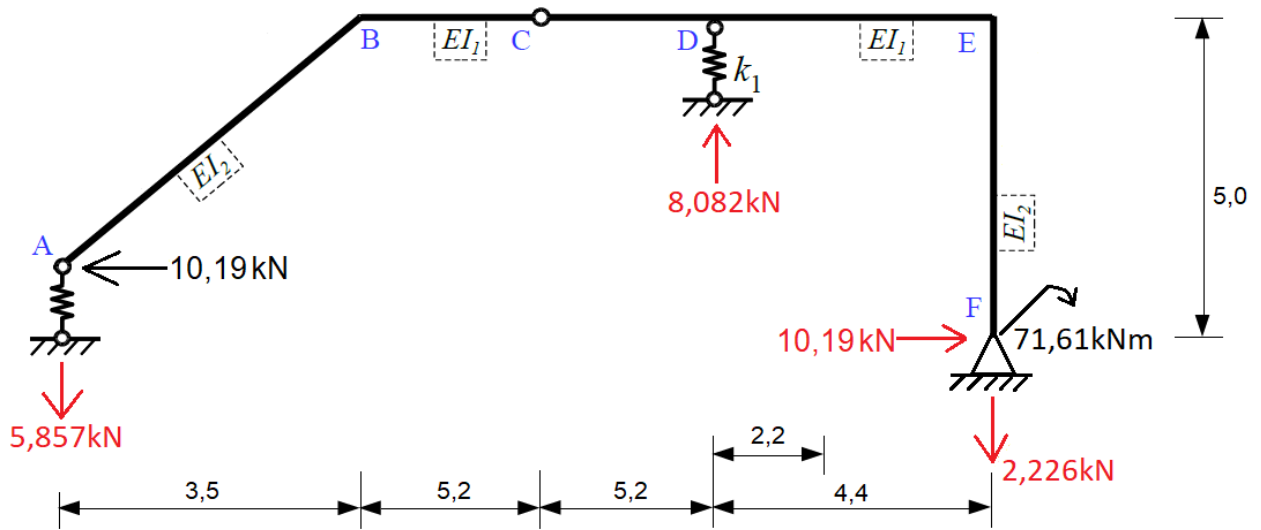
Obliczenie wartości niewiadomych  $X_1$  i  $X_2$ :

$$\begin{cases} \frac{93,83}{EI} X_1 + \frac{11,87}{EI} X_2 + 0,02608 = 0 \\ \frac{11,87}{EI} X_1 + \frac{4,007}{EI} X_2 - 0,04075 = 0 \end{cases}$$

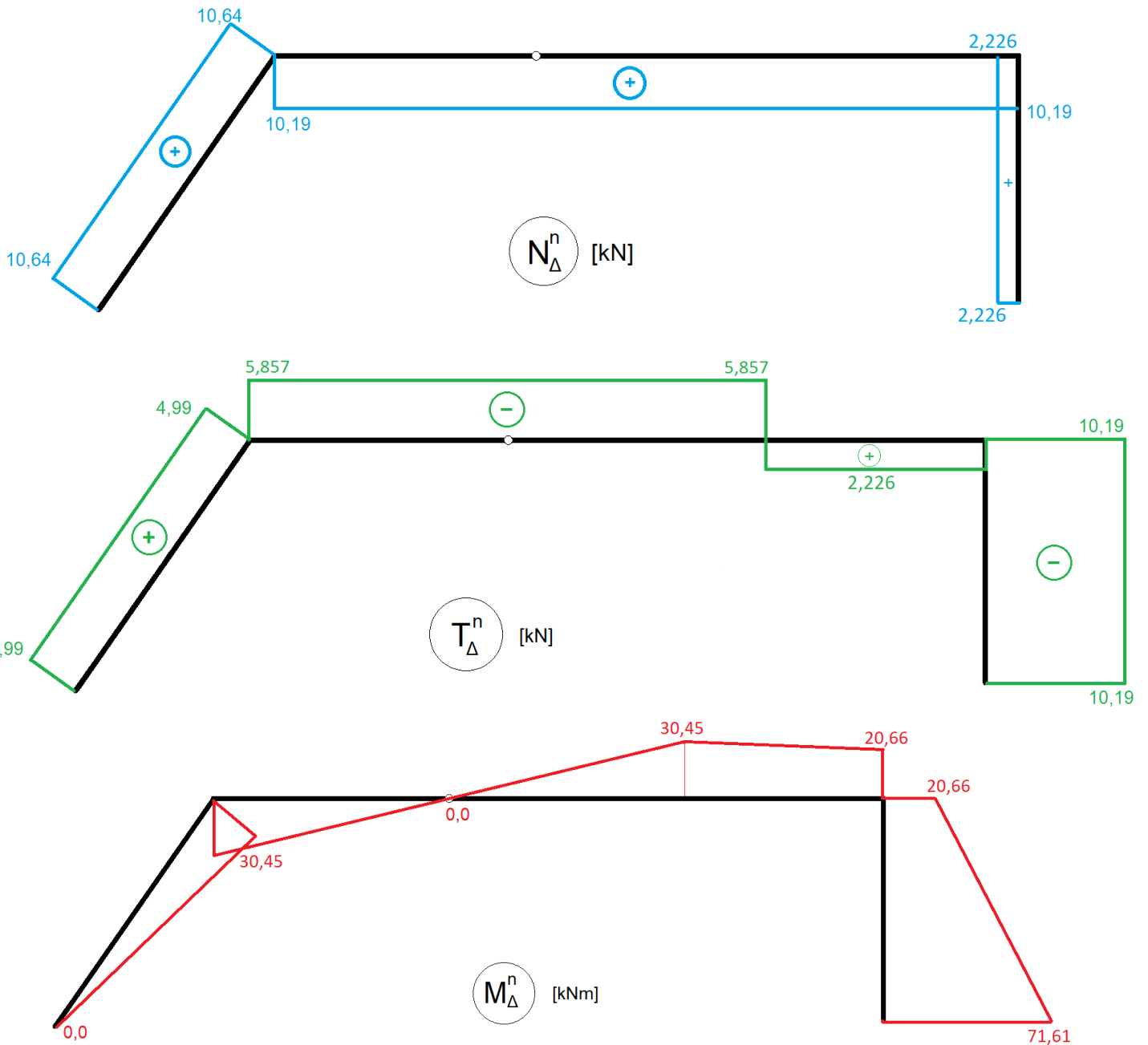
$$\begin{cases} 93,83X_1 + 11,87X_2 + 106,24992 = 0 \\ 11,87X_1 + 4,007X_2 - 166,0155 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -10,19kN \\ X_2 = 71,61kNm \end{cases}$$

Układ:

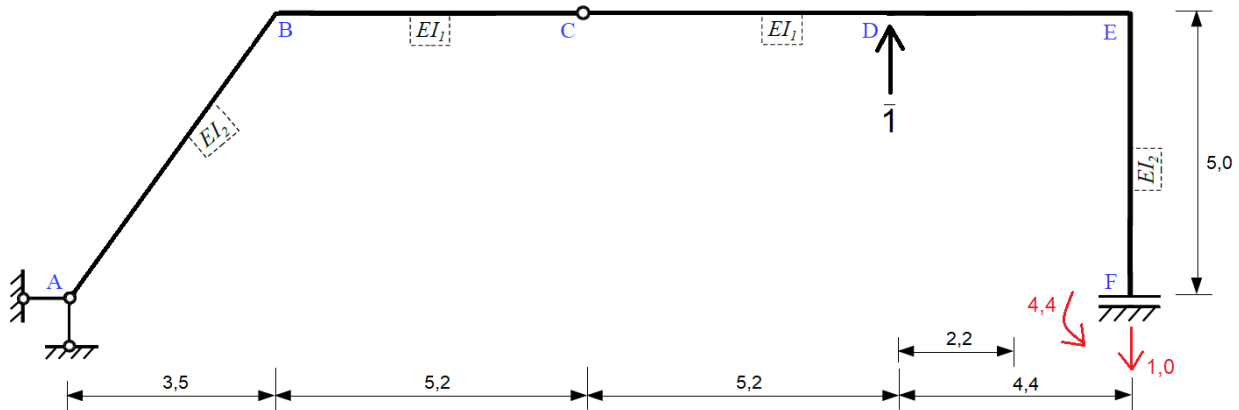


Wykresy sił wewnętrznych:

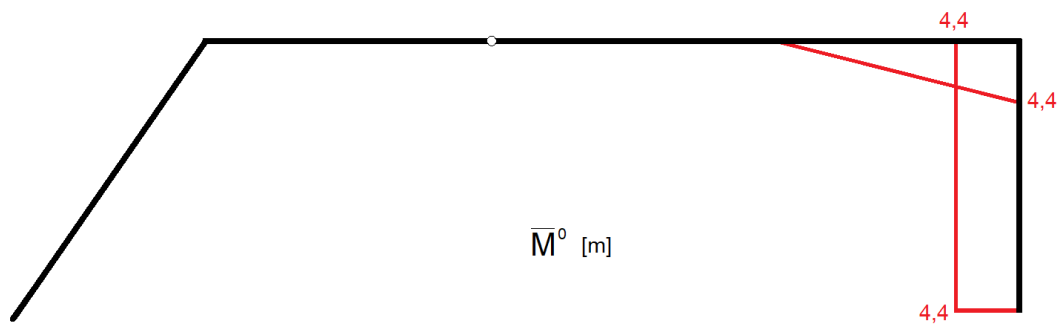


## 15. Sprawdzenie kinematyczne

Przyjęty schemat i obciążenie (taki sam jak poprzednio):



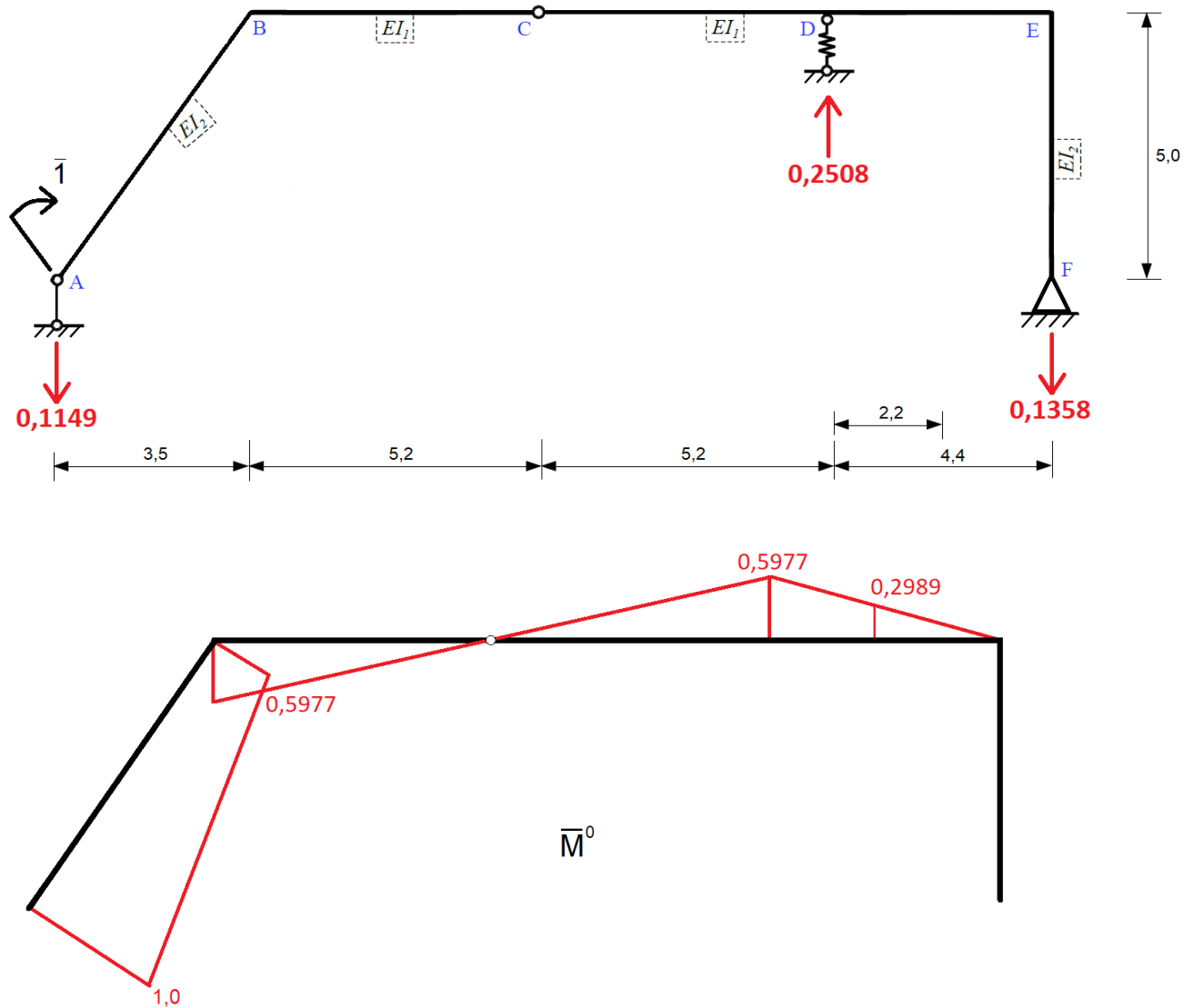
Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego:



$$\begin{aligned}
 \bar{1} \cdot V_D &= \int_S \frac{\bar{M}^0 M_\Delta^n}{EI} ds + \frac{R_\Delta^n \cdot \bar{R}^0}{k} - \sum \bar{R}^0 \cdot \Delta = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 30,45 \cdot 4,4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 4,4 + \frac{1}{2} \cdot 20,66 \cdot 4,4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 4,4}{EI_1} \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{2} \cdot 20,66 \cdot 5 \cdot (-4,4) + \frac{1}{2} \cdot 71,61 \cdot 5 \cdot (-4,4)}{EI_2} + \\
 &\quad + \frac{1 \cdot 8,082}{1,105EI} - (1 \cdot 0,005 - 4,4 \cdot 0,04189) = \\
 &= \frac{-231,5779}{EI} + \frac{-1014,97}{2,005EI} + \frac{8,082}{1,105EI} + \frac{0,179316 \cdot 4074}{EI} = \frac{0,05}{EI} \\
 |V_D| &< \frac{1}{EI} \Rightarrow V_D \approx 0
 \end{aligned}$$

16. Obliczenie obrotu w pkt. A od wywołanego osiadaniem podpór z wykorzystaniem twierdzenia redukcyjnego.

$$\varphi_A \cdot \bar{1} = \sum \int_S \frac{M_{\Delta}^n \bar{M}^0}{EI} ds + \frac{R_{\Delta}^n \cdot \bar{R}^0}{k} - \sum \bar{R}^0 \cdot \Delta$$



Wykres momentów zginających od obciążenia wirtualnego:

$$\begin{aligned} \varphi_A \cdot \bar{1} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 30,45 \cdot 6,103 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right)}{EI_2} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 30,45 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{2} \cdot 30,45 \cdot 5,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977 + \frac{1}{2} \cdot 30,45 \cdot 4,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5977}{EI_1} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cdot 20,66 \cdot 4,4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5977}{EI_1} + \frac{0,2508 \cdot 8,082}{4500} - (0,1358 \cdot 0,005) \\ &= \frac{67,998}{8169} + \frac{98,842}{4074} + \frac{2,027}{4500} - 0,00068 = \mathbf{0,03236 \text{ rad}} \end{aligned}$$