

*POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
WYDZIAŁ BUDOWNICTWA I INŻYNIERII ŚRODOWISKA  
INSTYTUT KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH  
ZAKŁAD MECHANIKI BUDOWLI*

## **Projekt nr 1**

# **Obliczanie przemieszczeń z zastosowaniem równania pracy wirtualnej**

Konrad Kaczmarek  
Albert Kawalek  
Grupa B3  
Semestr III  
Rok akademicki 2013/2014

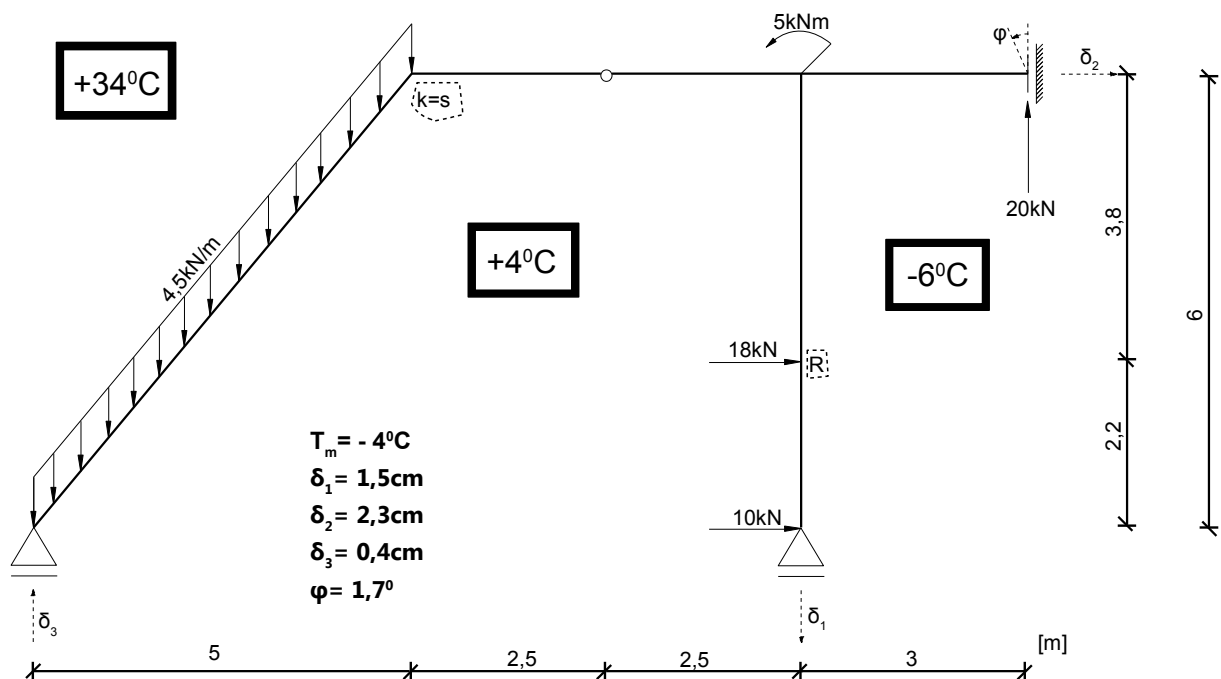
Dla podanego układu należy:

1.) Przyjąć wstępne przekroje prętów z profili dwuteowych (IN, IPE, HEB, HEA), tak aby pod działaniem podanego obciążenia powstałe w prętach naprężenia normalne spełniały warunek  $\sigma \leq 200$  MPa.

UWAGA: Przyjąć ten sam profil dla wszystkich prętów.

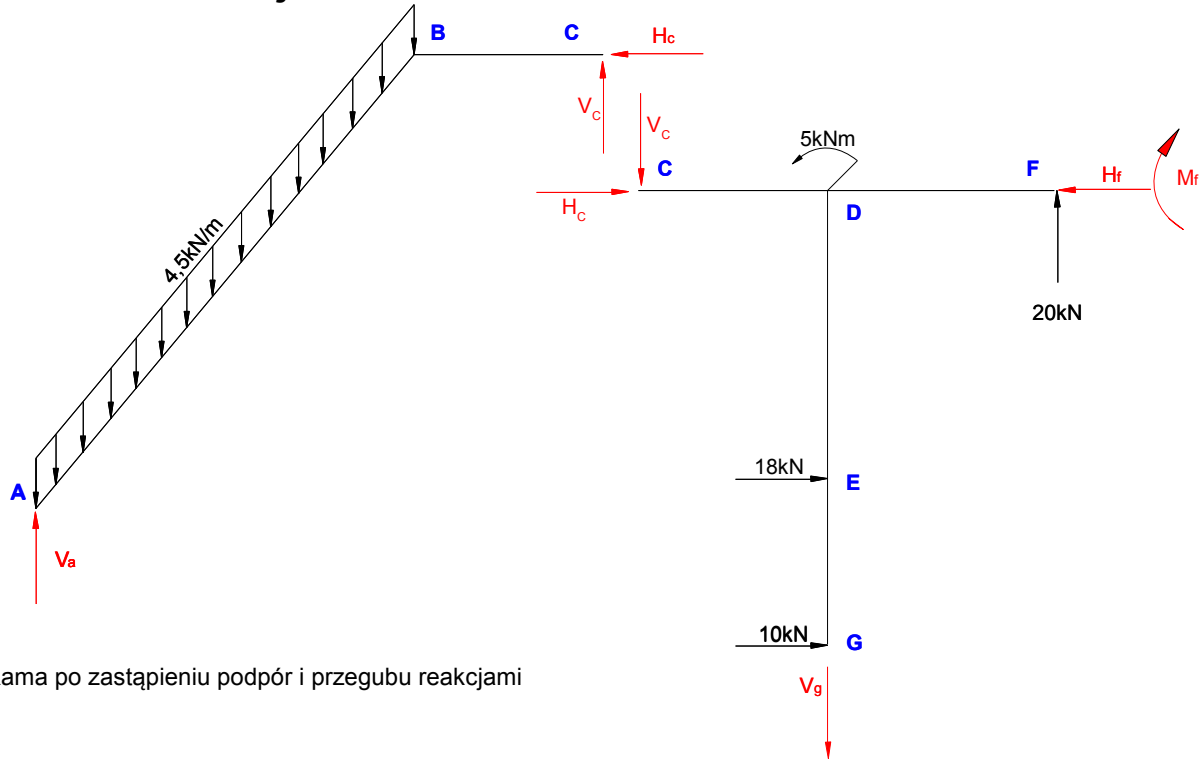
2.) Obliczyć następujące przemieszczenia:

- Przesunięcie punktu K (wypadkowa) od obciążenia zewnętrznego (wpływ M)
- Obrót przekroju K od zmiany temperatury
- Wzajemne zbliżenie punktów RS od obciążenia zewnętrznego (wpływ M)
- Obrót cięciwy RS od osiadania podpór



Rys. 1 Obciążenie ramy do policzenia

## 1. Obliczenie reakcji w ramie:



Rys. 2 Rama po zastąpieniu podpór i przegubu reakcjami

$$\sum M_C^L = -4,5 \cdot 5 \cdot 7,81 + V_A \cdot 7,5 = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{175,725}{7,5} = 23,43 \text{ kN}$$

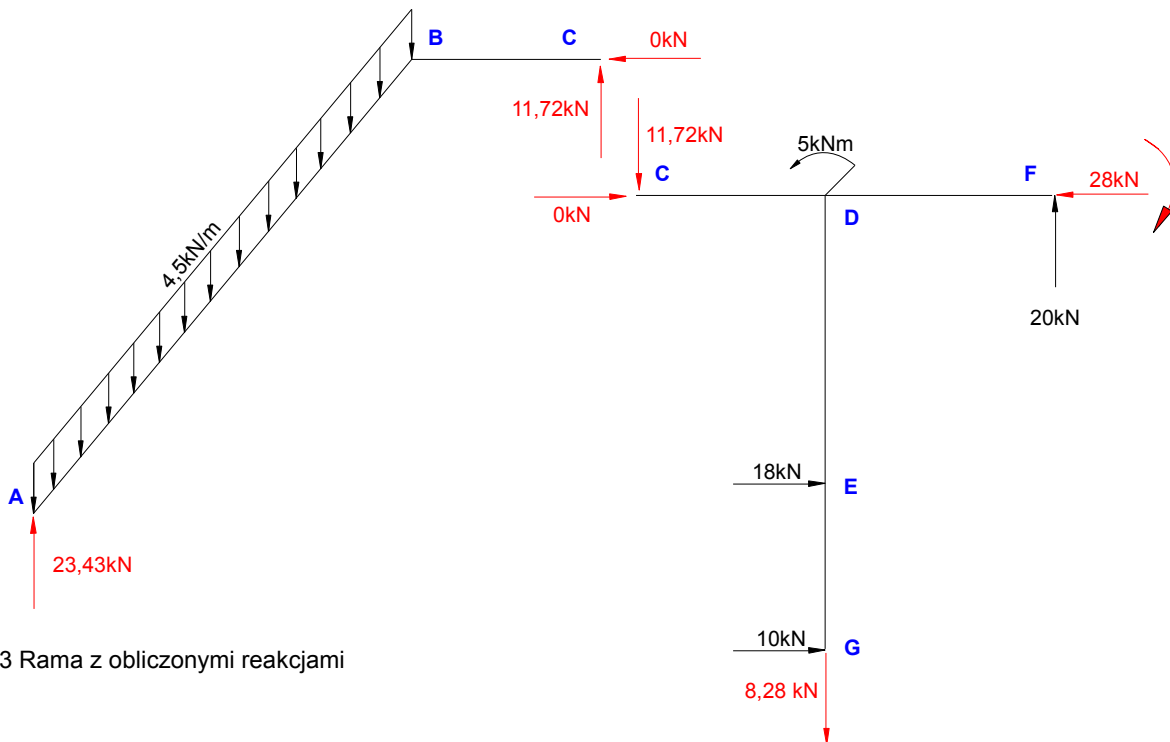
$$H_C = 0$$

$$\sum Y^L = 23,43 - 4,5 \cdot 7,81 + V_C = 0 \quad \rightarrow \quad V_C = 11,72 \text{ kN}$$

$$\sum Y^P = -V_G - 11,72 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad V_G = 8,28 \text{ kN}$$

$$\sum X^P = 18 + 10 - H_f = 0 \quad \rightarrow \quad H_f = 28 \text{ kN}$$

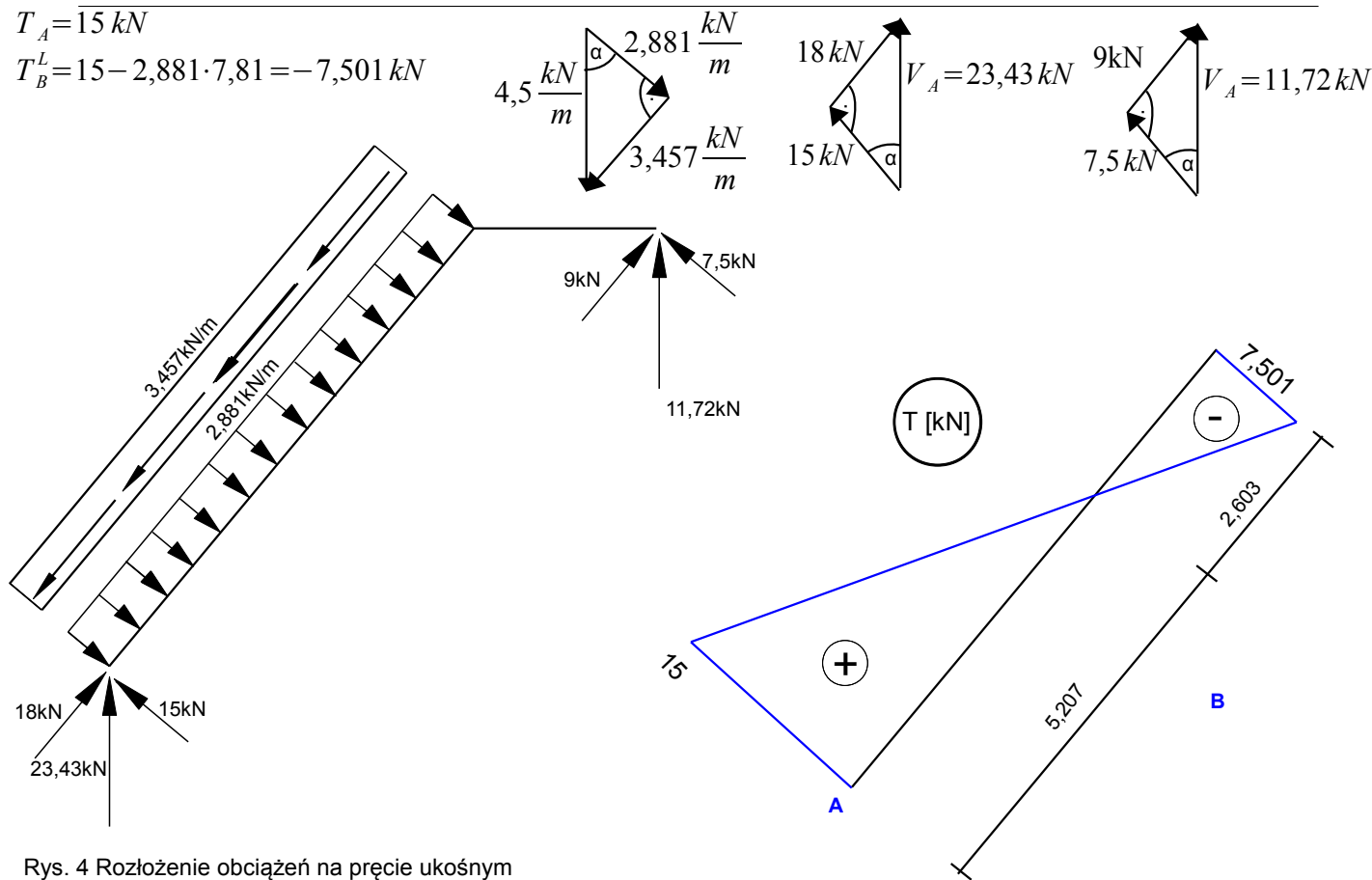
$$\sum M_C^P = -5 - 20 \cdot 5,5 - 18 \cdot 3,8 - 10 \cdot 6 + M_f + 8,28 \cdot 2,5 = 0 \quad \rightarrow \quad M_f = 222,7 \text{ kNm}$$



Rys. 3 Rama z obliczonymi reakcjami

$$T_A = 15 \text{ kN}$$

$$T_B^L = 15 - 2,881 \cdot 7,81 = -7,501 \text{ kN}$$



Rys. 4 Rozłożenie obciążeń na pręcie ukośnym

Rys. 6 Wykres siły tnącej na pręcie ukośnym

W celu znalezienia ekstremum momentu zginającego pod obciążeniem ciągłym na pręcie ukośnym, znajdujemy miejsce zerowe siły tnącej na tym pręcie. Pomijamy jednak dalszy wpływ tnącej oraz normalnej na przemieszczenia, ponieważ jest on pomijalnie mały w stosunku do wpływu momentu zginającego.

Obliczenie momentów wewnętrznych w ramie :

$$M_B^L = 15 \cdot 7,81 - 2,881 \cdot 7,81 \cdot \frac{7,81}{2} = 29,3 \text{ kNm}$$

$$M_{AB}^{ext} = 15 \cdot 5,207 - 2,881 \cdot 5,207 \cdot \frac{5,207}{2} = 39 \text{ kNm}$$

$$M_B^P = 11,72 \cdot 2,5 = 29,3 \text{ kNm}$$

$$M_D^L = -11,72 \cdot 2,5 = -29,3 \text{ kNm}$$

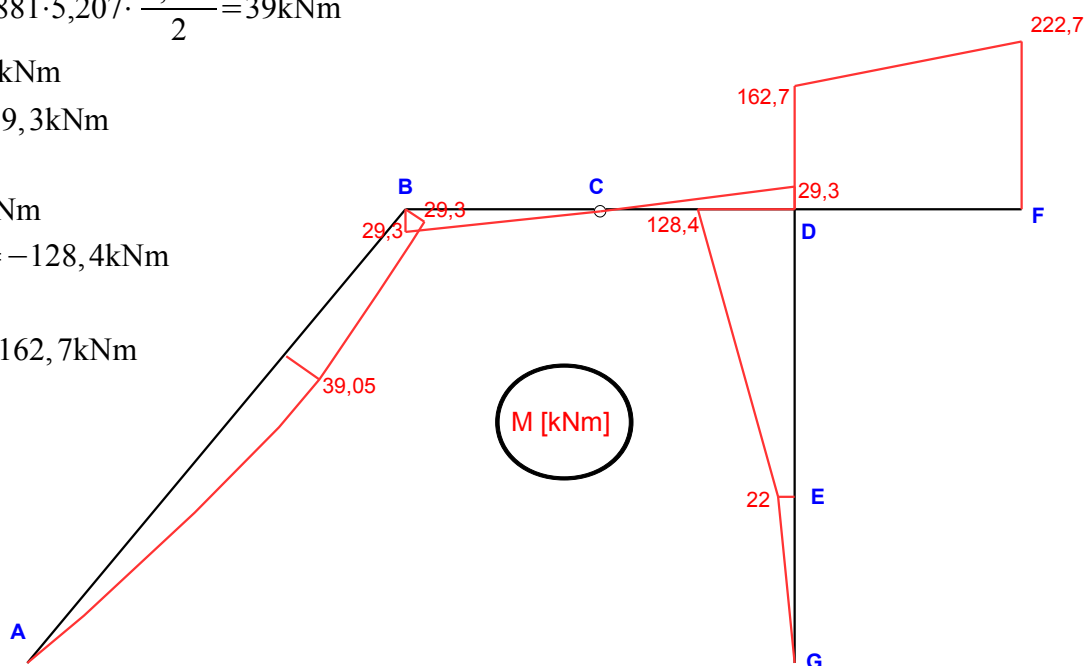
$$M_G = 0 \text{ kNm}$$

$$M_E^D = -10 \cdot 2,2 = -22 \text{ kNm}$$

$$M_D^D = -10 \cdot 6 - 18 \cdot 3,8 = -128,4 \text{ kNm}$$

$$M_F^L = -222,7 \text{ kNm}$$

$$M_D^P = -222,7 + 20 \cdot 3 = 162,7 \text{ kNm}$$



Rys. 7 Wykres momentów od obciążenia rzeczywistego

## 2. Projektowanie przekroju

$$M_y^{ext} = 222,7 \text{ kNm} = 22270 \text{ kNcm}$$

$$\text{Wytrzymałość materiału: } R = 200 \text{ MPa} = 20 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

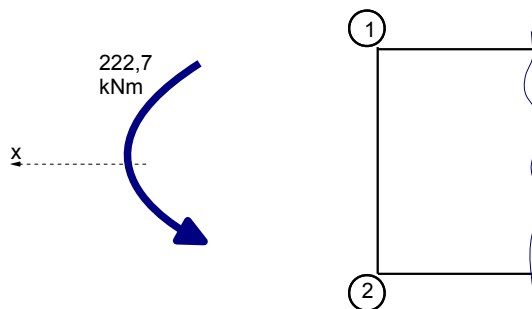
Wskazana wytrzymałości przekroju na zginanie powinien spełniać warunek:

$$W_y = \frac{M_y^{ext}}{R} = \frac{22270 \text{ kNm}}{20 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 1114 \text{ cm}^3$$

Przyjmujemy dwuteownik szerokostopowy HEB I 260 dla którego:

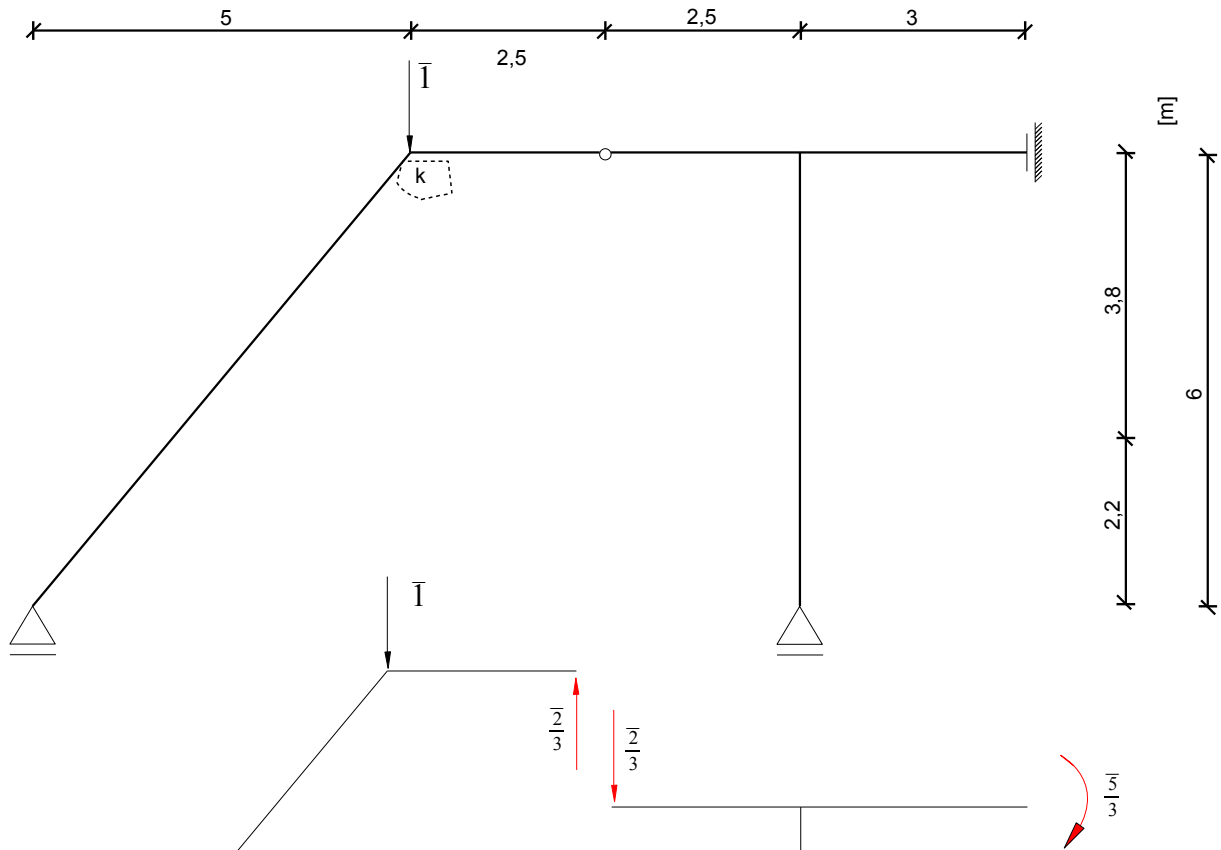
$$I_y = 14920 \text{ cm}^4$$

$$W_y = 1150 \text{ cm}^3$$

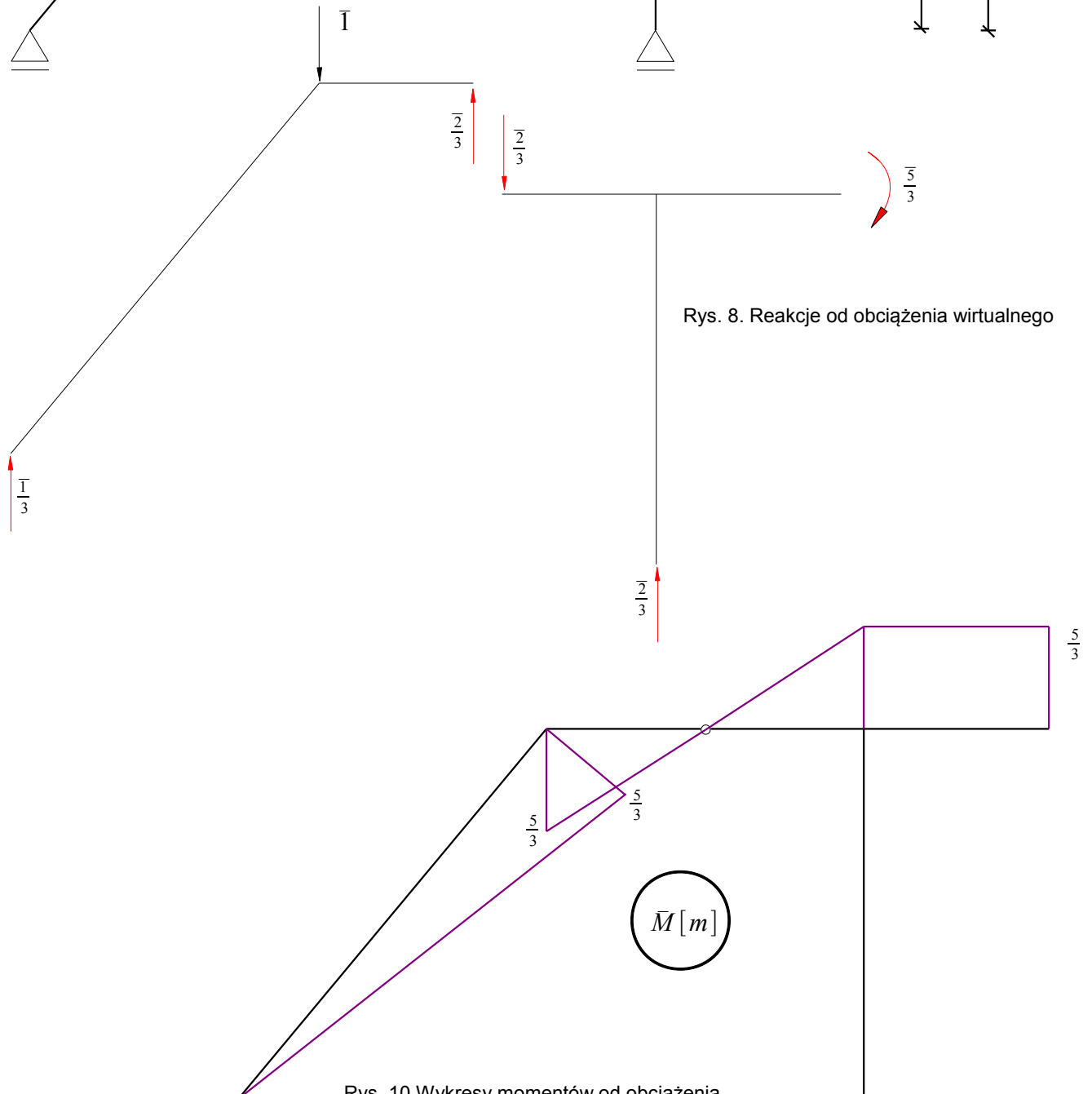


### 3. Obliczenie przemieszczenia punktu K (wypadkowa) od obciążenia zewnętrznego (wpływ M)

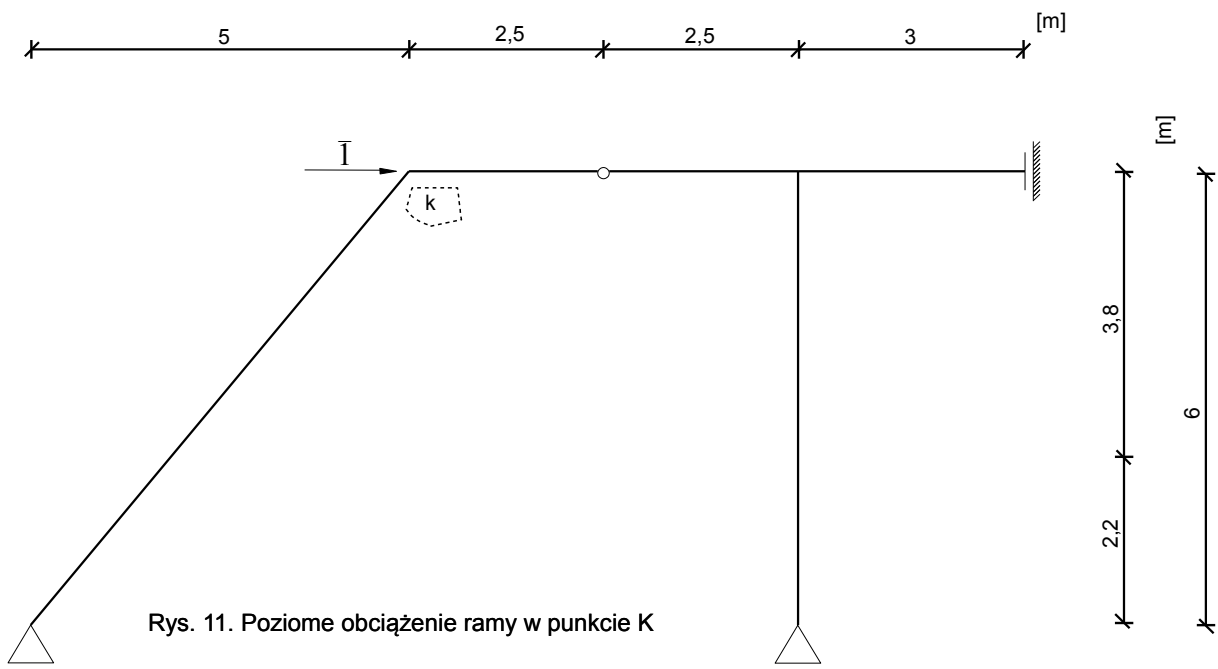
Rys. 8 Pionowe obciążenie wirtualne ramy w punkcie K.



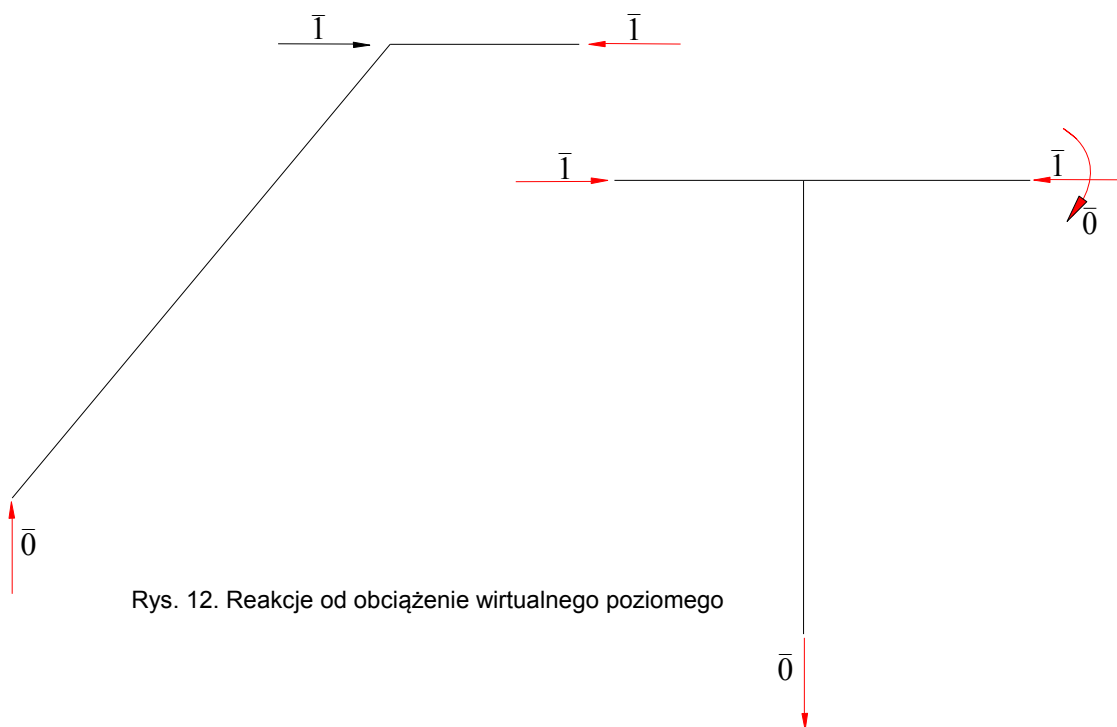
Rys. 8. Reakcje od obciążenia wirtualnego



Rys. 10 Wykresy momentów od obciążenia wirtualnego.



Rys. 11. Poziome obciążenie ramy w punkcie K



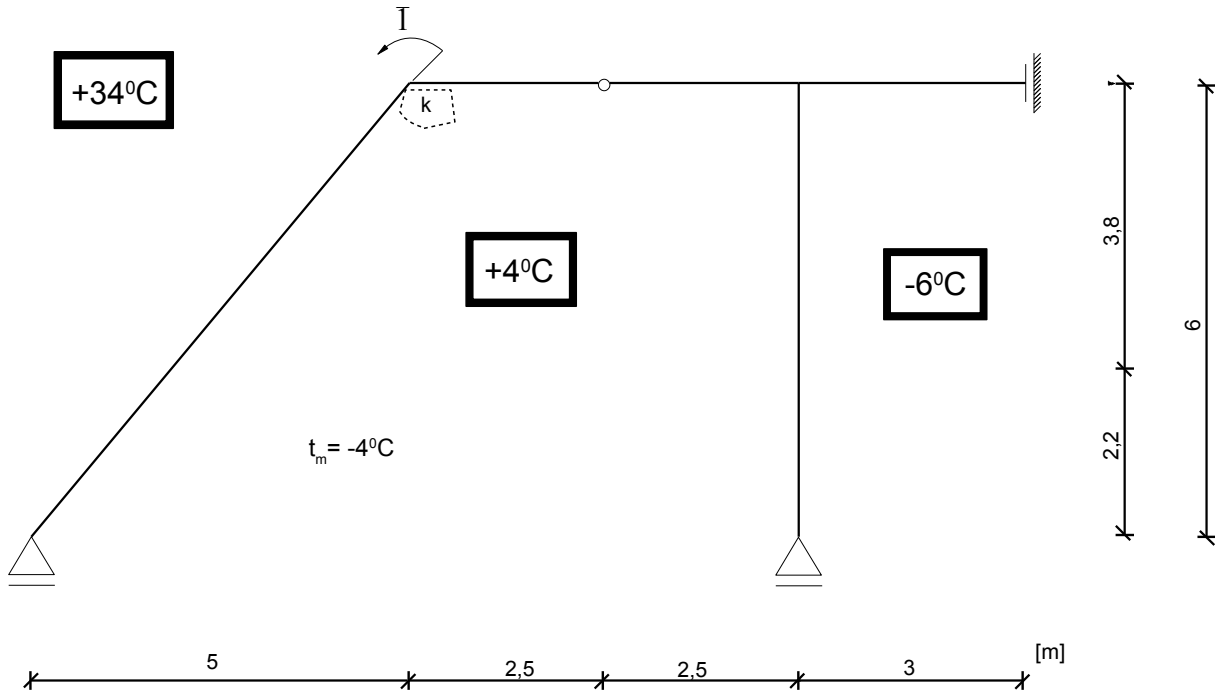
Rys. 12. Reakcje od obciążenie wirtualnego poziomego

Przy obciążeniu siłą wirtualną poziomą wykresy momentów wirtualnych są równe zero, więc nie ma przemieszczenia poziomego punktu K.

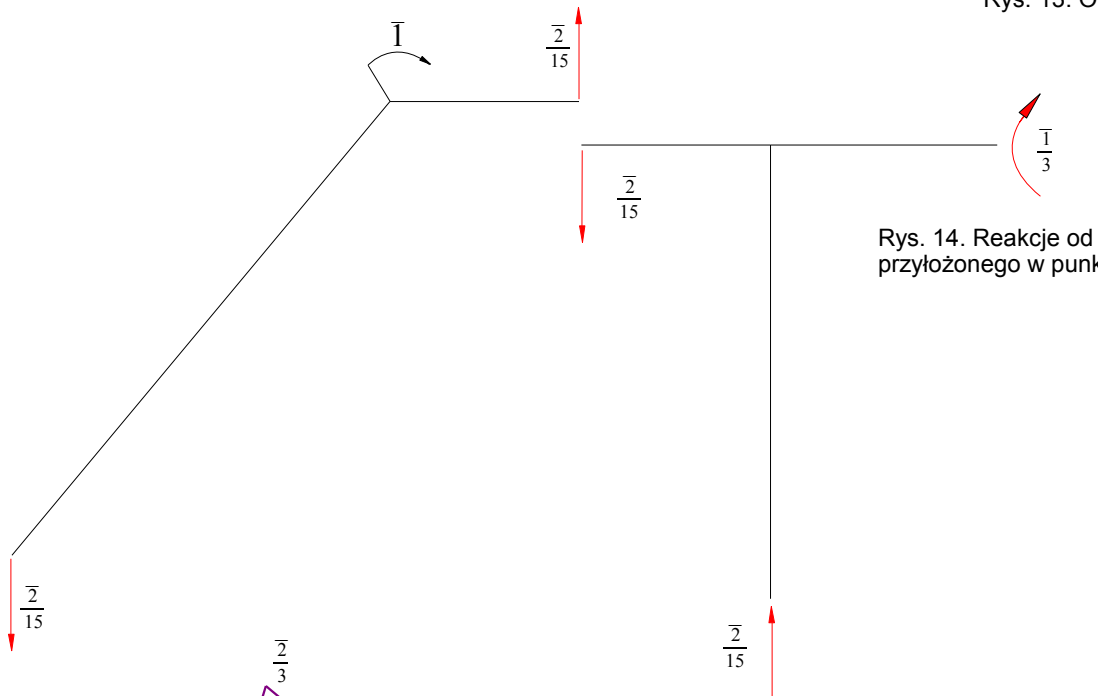
$$\begin{aligned}
 V_K \cdot \bar{I} &= \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EJ} dx = \\
 &= \frac{1}{30590} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot 7,81 \cdot \frac{4,5 \cdot 7,81 \cdot 5}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} + 7,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot 29,3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 29,3 \cdot 2 + \frac{5}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} (162,7 \cdot 222,7) \right] = \\
 &= \frac{1267}{30586} m = 4,142 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Przemieszczenie pionowe punktu K wynosi 4,142 cm, zgodnie z założonym zwrotem.

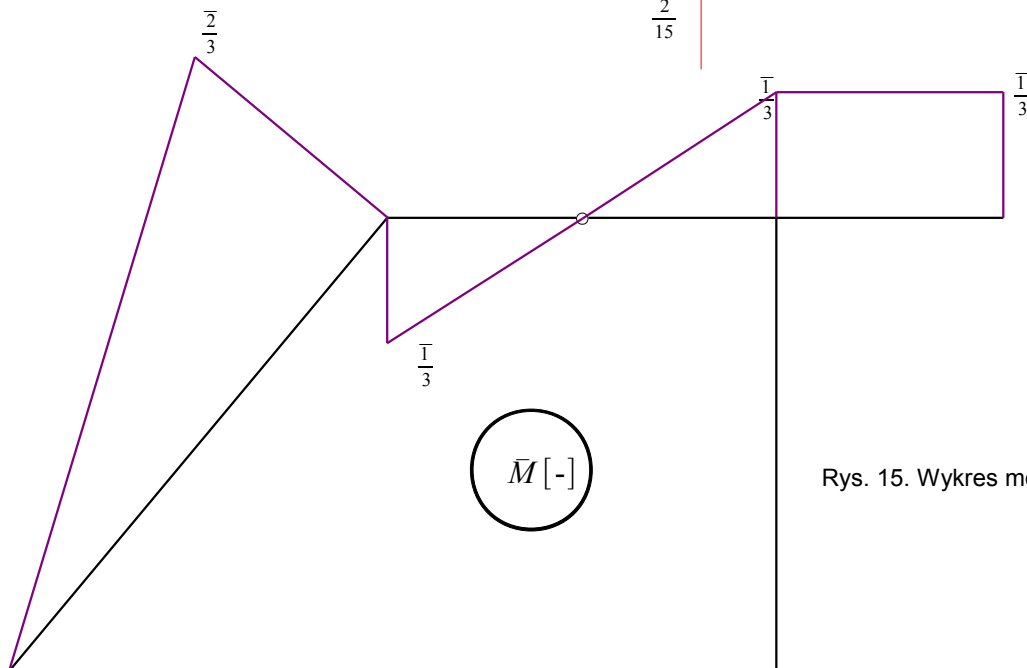
### 4. Obliczanie obrotu przekroju K spowodowane zmianą temperatury:



Rys. 13. Obciążenie temperaturą

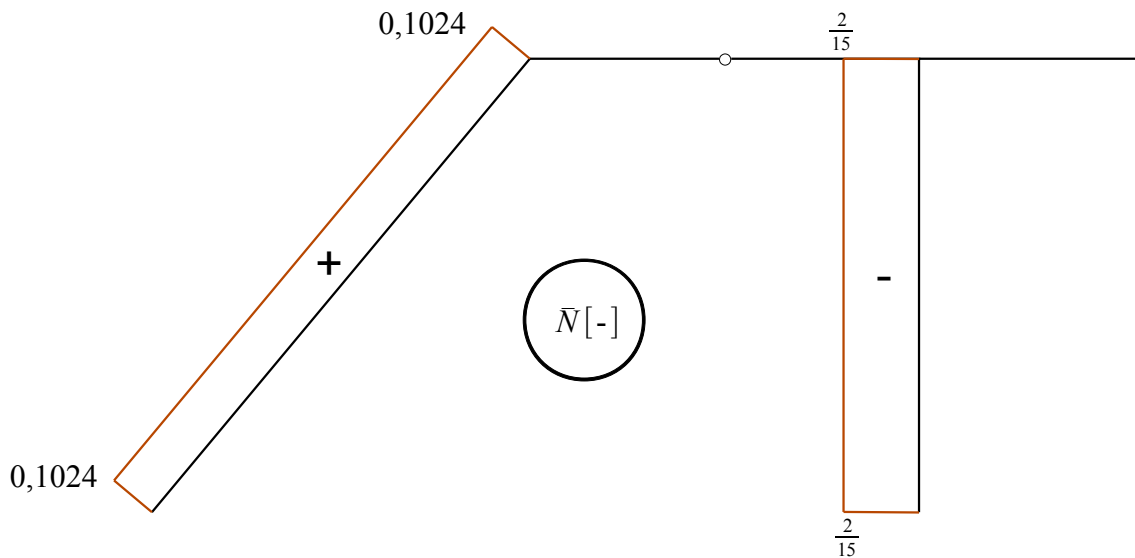


Rys. 14. Reakcje od momentu wirtualnego przyłożonego w punkcie K



Rys. 15. Wykres momentów wirtualnych





Rys. 16. Wykres normalnej wirtualnej

$$t_0^{(1)} = \frac{t_g + t_d}{2} - t_m = \frac{34 + 4}{2} - (-4) = 23^\circ C$$

$$t_0^{(2)} = \frac{t_g + t_d}{2} - t_m = \frac{4 + (-6)}{2} - (-4) = 3^\circ C$$

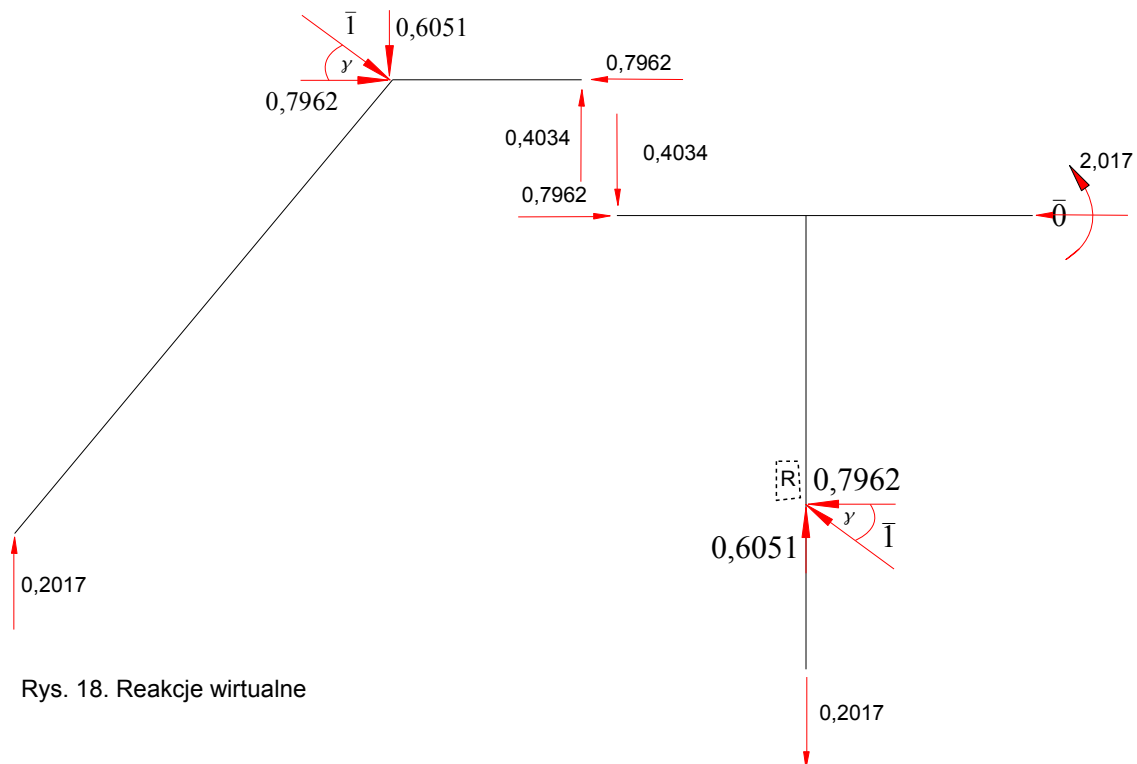
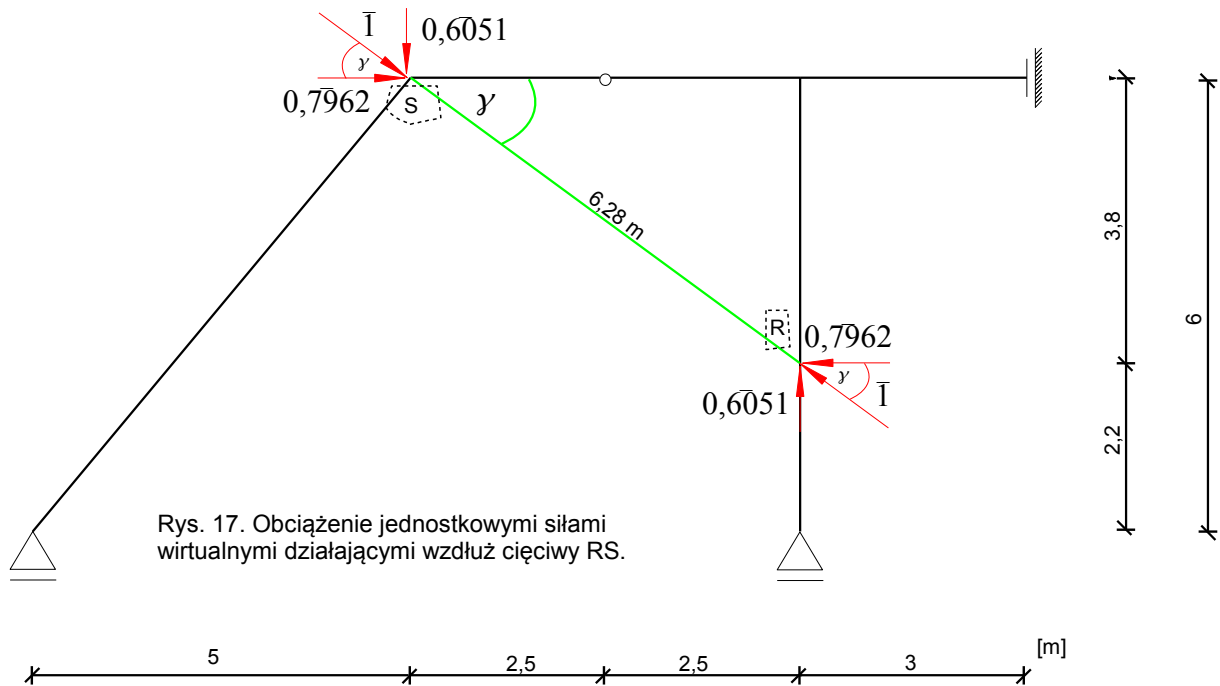
$$|\Delta t^{(1)}| = 34 - 4 = 30^\circ C$$

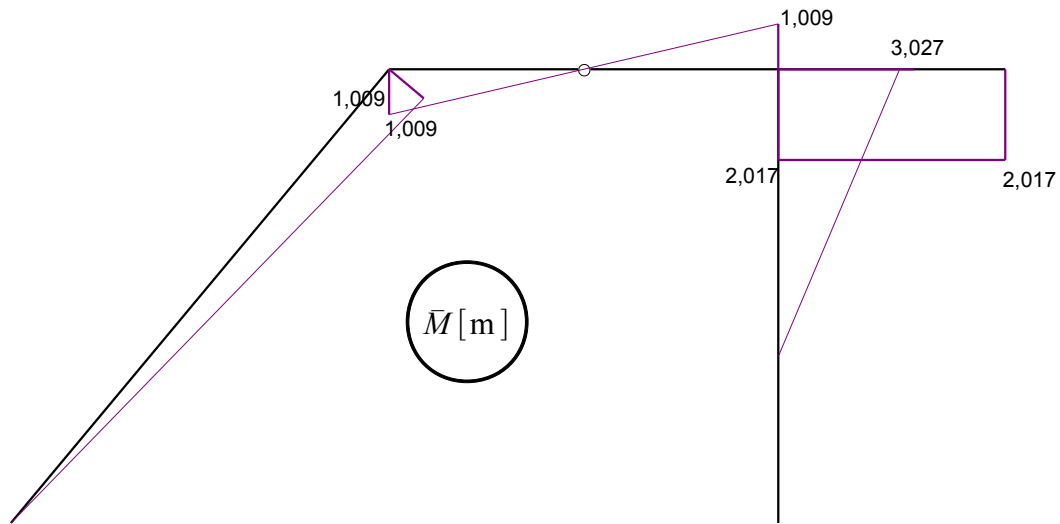
$$|\Delta t^{(2)}| = 34 - (-6) = 40^\circ C$$

$$\begin{aligned} V_k^T \cdot \bar{1} &= \sum \int \bar{M} \cdot \alpha_i \cdot \frac{|\Delta t|}{h} dx + \sum \int \bar{N} \cdot \alpha_i \cdot t_0 dx = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \left[ \frac{30}{0,26} \cdot \left( 7,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 \right) + \frac{40}{0,26} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \right] + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \left( 23 \cdot 0,1024 \cdot 7,81 - 3 \cdot \frac{2}{15} \cdot 6 \right) = \\ &= \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,26} \cdot 118,1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 15,99 = 564,3 \cdot 10^{-5} rad = 0,3235^\circ \end{aligned}$$

Obrót punktu S wynosi 0,3235 stopnia, zwrot zgodnie z założeniem.

## 5. Obliczanie wzajemnego zbliżenia punktów RS spowodowane obciążeniem zewnętrznym (wpływ M)





Rys. 19. Wykres momentów wirtualnych.

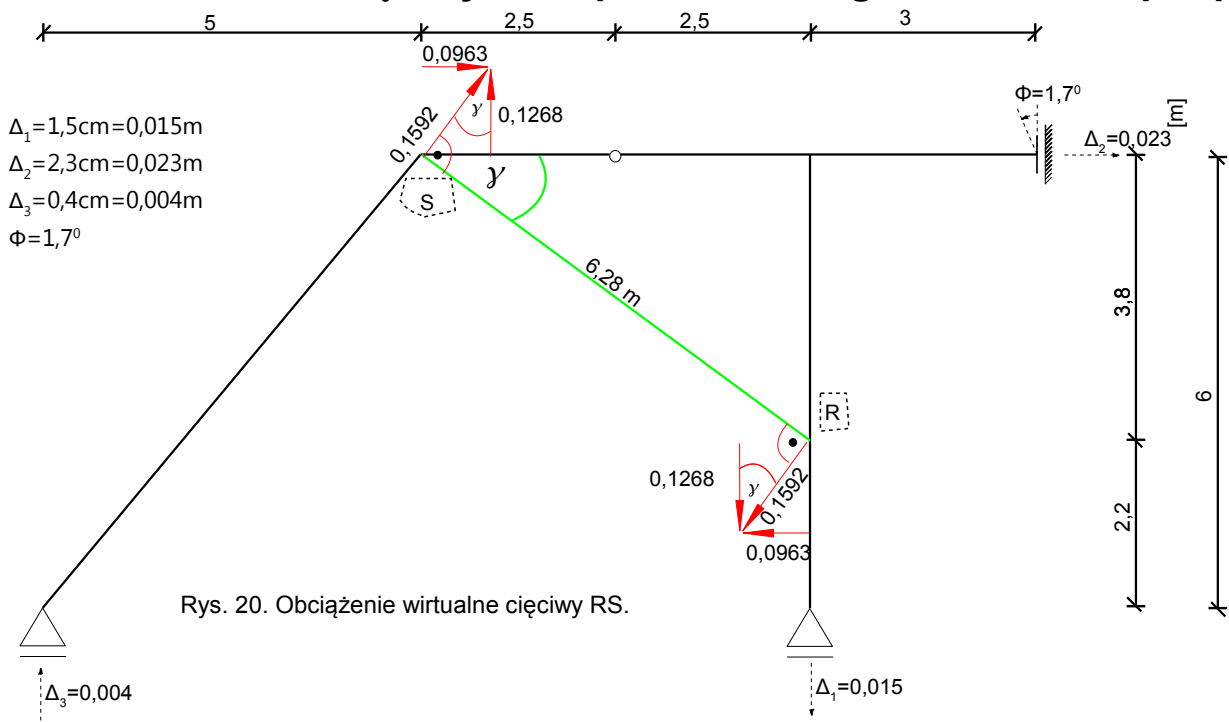
$$\Delta_{K-R} \cdot \bar{1} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{I J} dx =$$

$$\frac{1}{30590} \left[ \frac{2}{3} \cdot 7,81 \cdot \frac{4,5 \cdot 7,81 \cdot 5}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,009 + 29,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7,81 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,009 + 29,3 \cdot 2,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,009 \cdot 2 \right] +$$

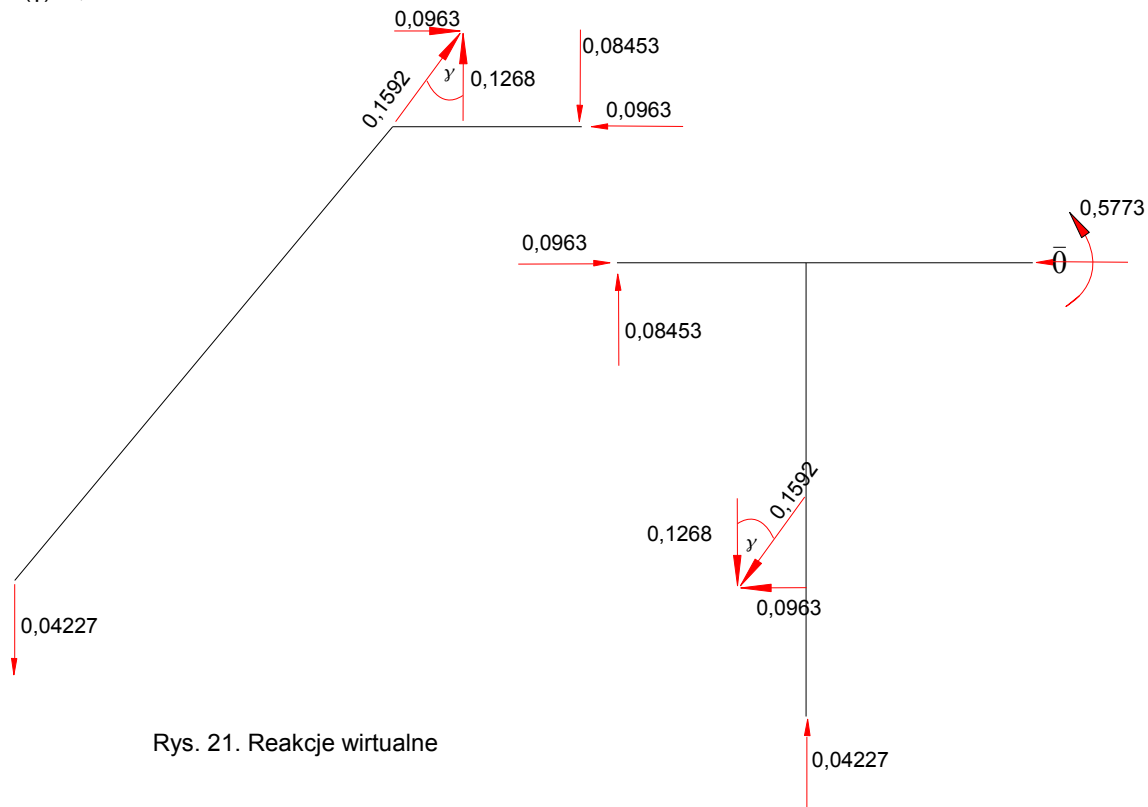
$$- \frac{1}{30590} \left[ 2,017 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (162,7 + 222,7) + 3,8 \cdot 3,027 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 22 + \frac{2}{3} \cdot 128,9 \right) \right] = -0,04953 \text{ m} = -4,953 \text{ cm}$$

Wzajemne oddalenie punktów RS wynosi 4,953 cm.

## 5. Obliczanie obrotu cięgiwy R-S spowodowanego osiadaniem podpór



$\sin(\gamma) = 0,6051$   
 $\cos(\gamma) = 0,7962$



$$\alpha_{R-S}^{(\Delta)} \cdot \bar{1} = -\sum \bar{R} \cdot \Delta =$$

$$= -\left[ -0,04227 \cdot 0,015 - 0,04227 \cdot 0,004 + 0,5773 \cdot 1,7 \cdot \frac{\pi}{180} \right] = -0,01633 \text{ rad}$$

$$-0,01633 \text{ rad} \cdot \frac{180}{\pi} = -0,9356^\circ$$

Obrót cięgiwy R-S od osiadania podpór wyniesie  $0,9356^\circ$  w kierunku przeciwnym niż założony (w lewo).