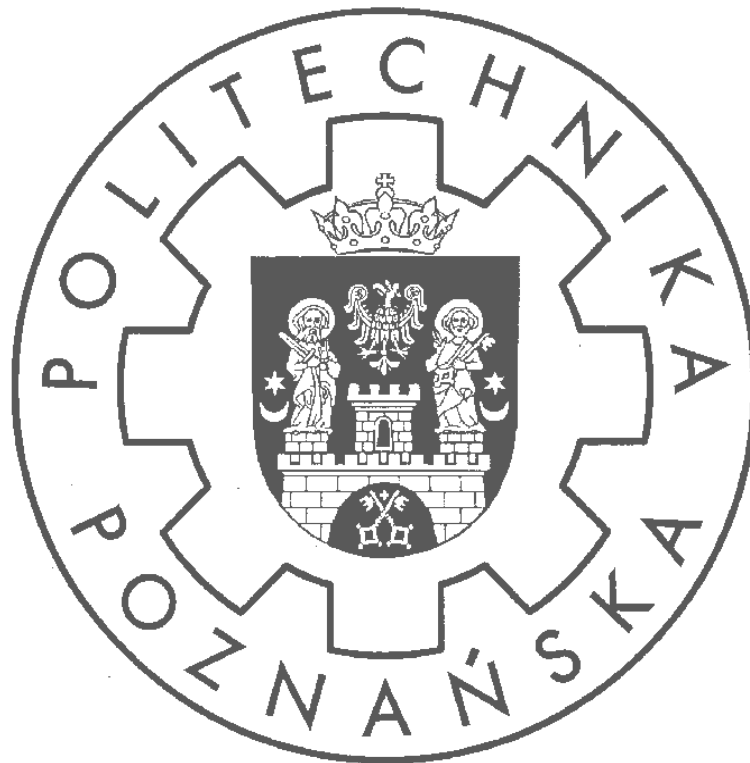


**Politechnika Poznańska**  
**Instytut Konstrukcji Budowlanych**  
**Zakład Mechaniki Budowli**



## **Ćwiczenie projektowe nr 1**

**Obliczanie przemieszczeń z zastosowaniem równania pracy  
wirtualnej**

Prowadzący:

Autor:

Nr indeksu:

Semestr:

Rok:

mgr inż. Anita Kaczor

Robert Dybionka

Jakub Stasiak

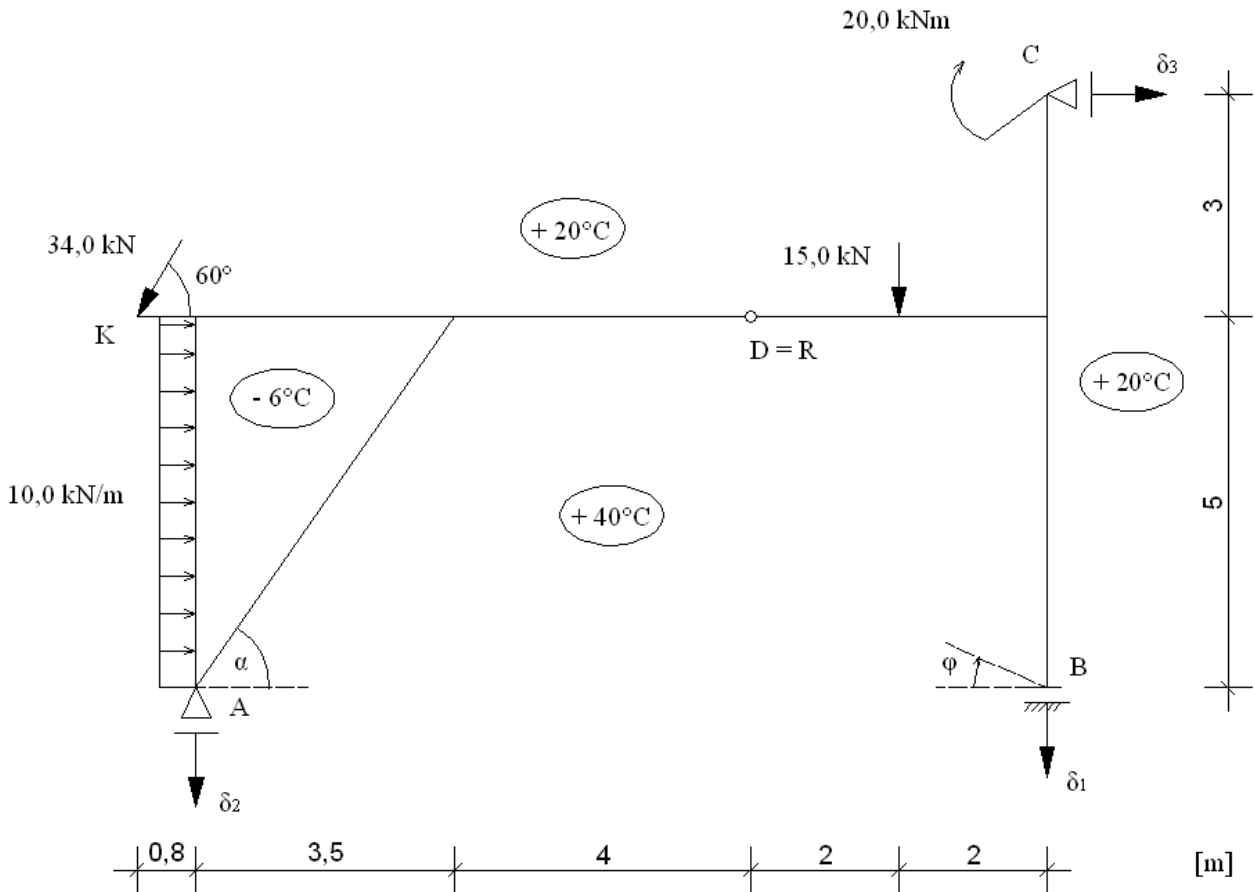
113012

III (pierwszy stopień)

2013/2014

# Ćwiczenie projektowe nr 1 – Obliczanie przemieszczeń z zastosowaniem równania pracy wirtualnej

## 1. Schemat statyczny ramy:

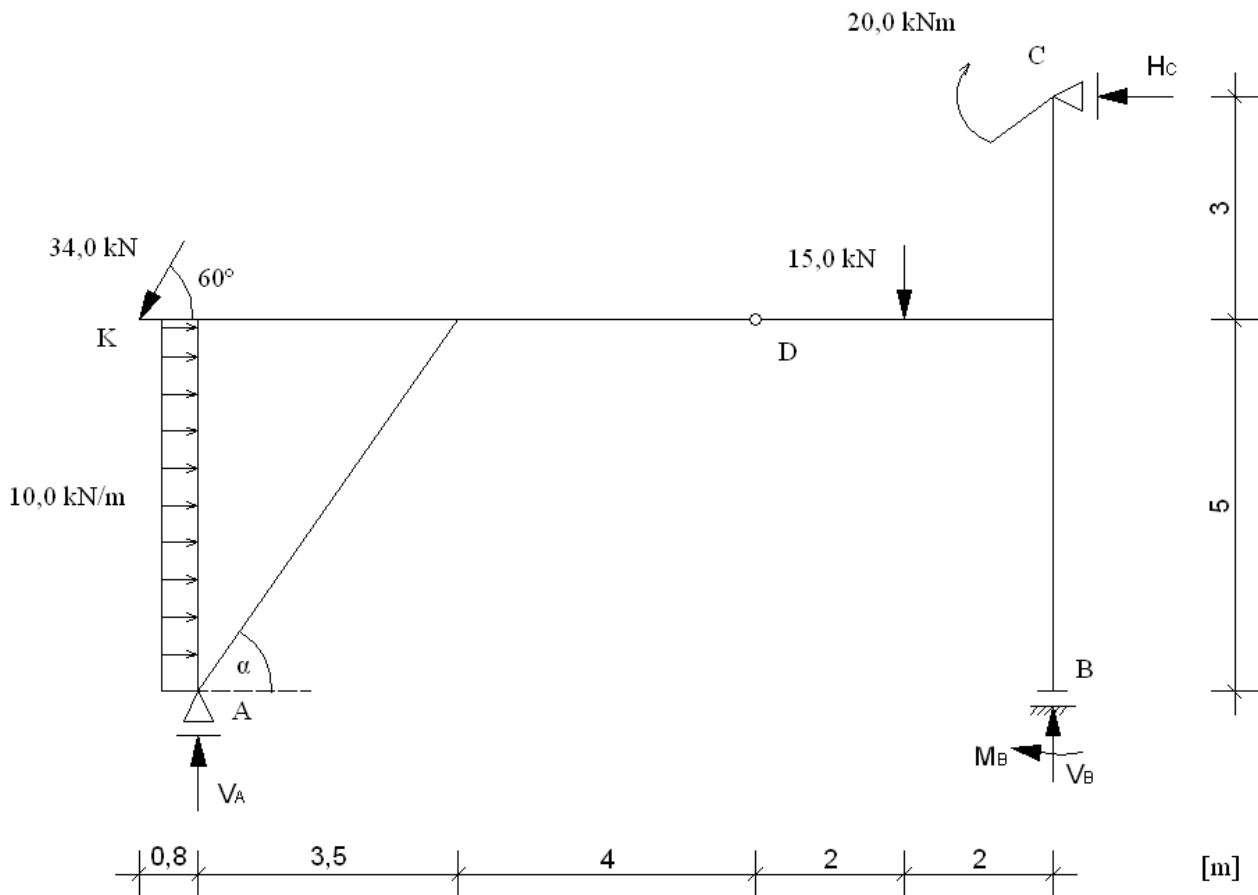


## 2. Dane wyjściowe do projektu:

- $t_m = + 8^\circ\text{C}$
- $\delta_1 = 1,7 \text{ cm}$
- $\delta_2 = 3,5 \text{ cm}$
- $\delta_3 = 0,8 \text{ cm}$
- $\varphi = 2,7^\circ = 0,04712 \text{ rad}$
- $\sin 60^\circ = 0,8660$
- $\cos 60^\circ = 0,5$
- $\sin \alpha = 0,8192$
- $\cos \alpha = 0,5735$
- $\sigma_{\text{dop}} = 200 \text{ MPa}$
- $E = 205 \text{ GPa}$
- $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$

### 3. Wyznaczenie reakcji podporowych:

#### 3.1. Schemat statyczny:



#### 3.2. AD:

$$\begin{aligned}\Sigma M_D &= V_A \cdot 7,5 - 10,0 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - 34,0 \cdot 0,866 \cdot 8,3 = 0 \\ V_A \cdot 7,5 &= 369,3852 \\ \mathbf{V_A} &= \mathbf{49,2514 \text{ kN}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma X &= -H_D - 34,0 \cdot 0,5 + 10,0 \cdot 5,0 = 0 \\ \mathbf{H_D} &= \mathbf{33,0 \text{ kN}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= -V_D \cdot 7,5 - 33,0 \cdot 5,0 - 34,0 \cdot 0,866 \cdot 0,8 + 10,0 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - 34,0 \cdot 0,5 \cdot 5,0 = 0 \\ V_D \cdot 7,5 &= -148,5552 \\ \mathbf{V_D} &= \mathbf{-19,8074 \text{ kN}}\end{aligned}$$

3.3. CD:

$$\Sigma M_C = M_B + 20,0 - 15,0 \cdot 2,0 + 19,8074 \cdot 4,0 - 33,0 \cdot 3,0 = 0$$

$$M_B = 29,7704 \text{ kNm}$$

$$\Sigma M_B = -H_C \cdot 8,0 + 20,0 + 29,7704 - 15,0 \cdot 2,0 + 33,0 \cdot 5,0 + 19,8074 \cdot 4,0 = 0$$

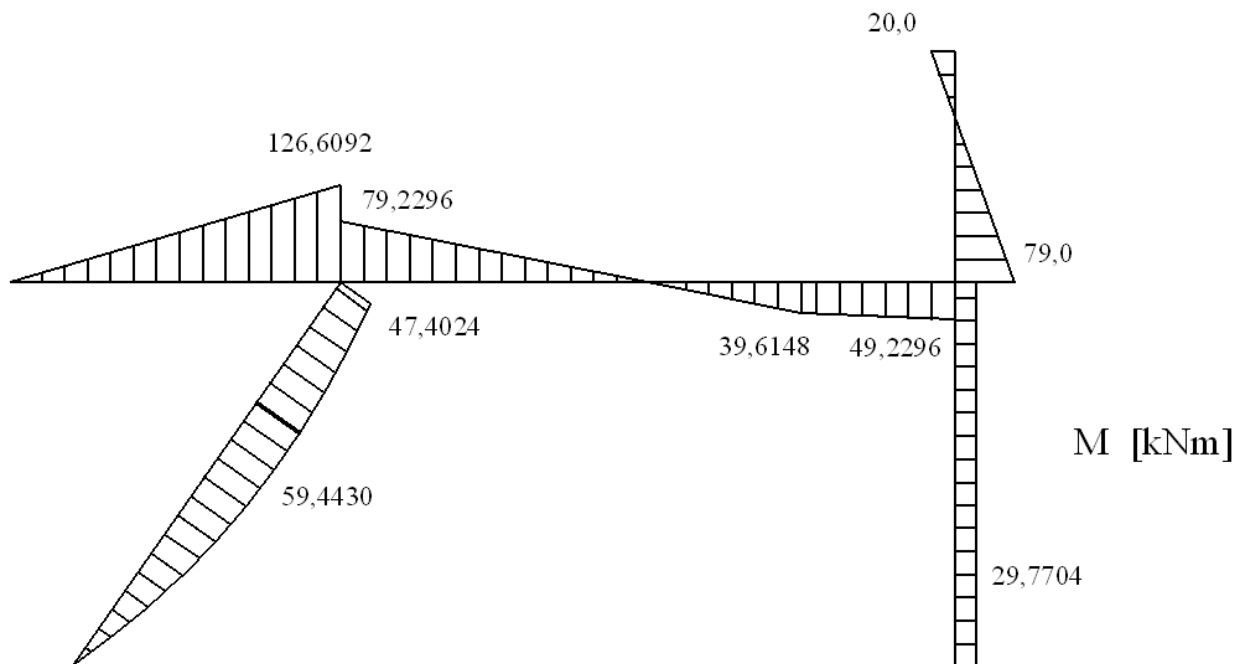
$$H_C \cdot 8,0 = 264,0$$

$$H_C = 33,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = V_B + 19,8074 - 15,0 = 0$$

$$V_B = -4,8074 \text{ kN}$$

3.4. Wykres momentów:



4. Projektowanie przekroju:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dop}} = 200 \text{ MPa}$$

$$\frac{M_{\max}}{W} \leq 20,0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$W \geq \frac{12660,92}{20}$$

$$W \geq 633,046 \text{ cm}^3$$

Przyjęto: IPE 330

$$W = 713,0 \text{ cm}^3$$

$$I = 11770 \text{ cm}^4$$

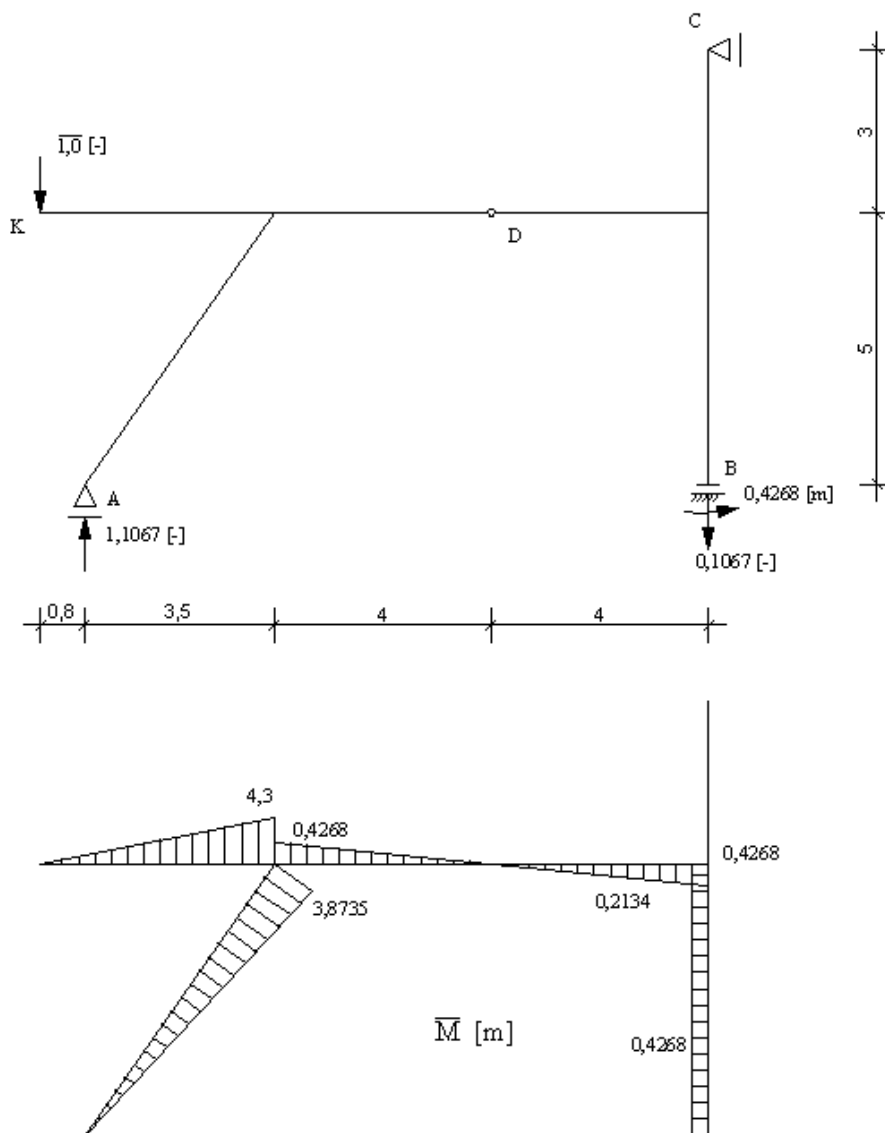
$$A = 62,6 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{12660,92}{713,0} = 177,5725 \text{ MPa} < \sigma_{\text{dop}} = 200 \text{ MPa}$$

$$EI = 205 \cdot 10^6 \cdot 11770 \cdot 10^{-8} = 24128,5 \text{ kNm}^2$$

## 5. Przemieszczenie wypadkowe punktu K od obciążenia zewnętrznego (wpływ M):

### 5.1. Przemieszczenie pionowe:



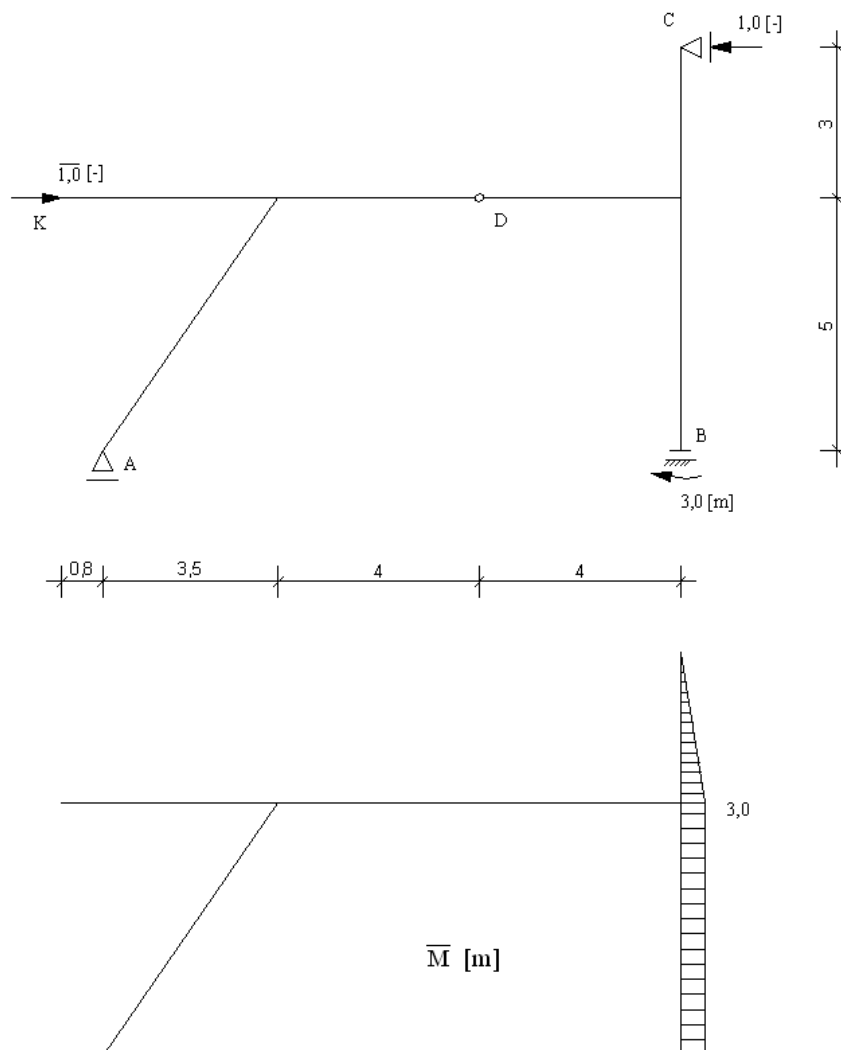
$$V_K^M \cdot \bar{1,0} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} \cdot dx$$

$$V_K^M \cdot \bar{1,0} = \frac{1}{24128,5} [5,0 \cdot 0,4268 \cdot (-29,7704) + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 0,4268 \cdot (\frac{2}{3} \cdot 49,2296 + \frac{1}{3} \cdot 39,6148) + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 0,2134 (\frac{1}{3} \cdot 49,2296 + \frac{2}{3} \cdot 39,6148) + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 0,2134 \cdot \frac{2}{3} \cdot 39,6148 + \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 0,4268 \cdot \frac{2}{3} \cdot 79,2296 + \frac{1}{2} \cdot 4,3 \cdot 4,3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 126,6092 + \frac{1}{2} \cdot 6,1033 \cdot 3,8735 \cdot \frac{2}{3} \cdot 47,4024 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10,0 \cdot 5^2}{8} \cdot 6,1033 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,8735]$$

$$V_K^M = \frac{1}{24128,5} [-63,53 + 14,0075 + 5,6359 + 3,5019 + 5,6359 + 5,6359 + 45,0869 + 780,3347 + 373,5488 + 246,2618]$$

$$V_K^M = \frac{1416,1193}{24128,5} = \mathbf{0,05869 \text{ m}}$$

5.2. Przemieszczenie poziome:



$$H_K^M \cdot \overline{1,0} = \sum \int \frac{M\overline{M}}{EI} \cdot dx$$

$$H_K^M \cdot \overline{1,0} = \frac{1}{24128,5} \left[ \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 3,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 79,0 + \frac{1}{2} \cdot 3,0 \cdot 3,0 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 20,0\right) + 3,0 \cdot 5,0 \cdot 29,7704 \right]$$

$$H_K^M = \frac{1}{24128,5} [237,0 - 30,0 + 446,556]$$

$$H_K^M = \frac{653,556}{24128,5} = \mathbf{0,02709 \text{ m}}$$

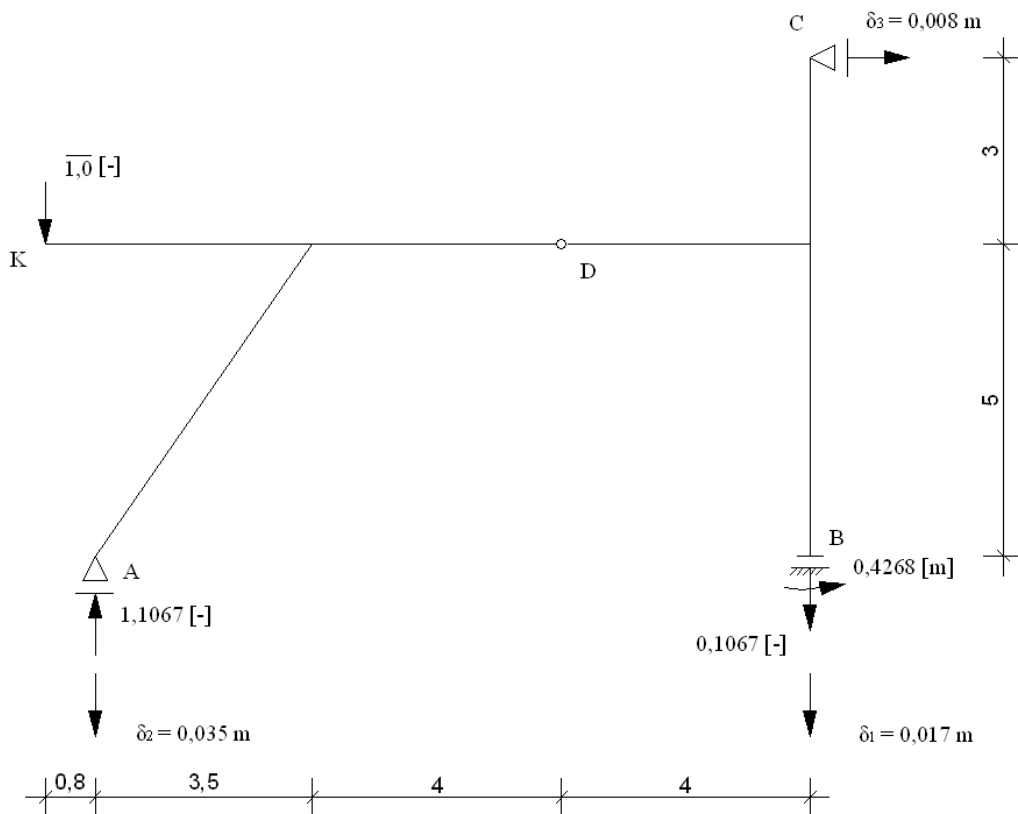
5.3. Przemieszczenie wypadkowe:

$$w_K^M = \sqrt{(V_K^M)^2 + (H_K^M)^2}$$

$$w_K^M = \sqrt{(0,05869)^2 + (0,02709)^2}$$

$$w_K^M = \mathbf{0,06464 \text{ m}}$$

6. Przemieszczenie punktu  $K$  od osiadania podpór (składowa pionowa):



$$\delta_K \cdot \overline{1,0} = - \sum_i \overline{R}_i \cdot \Delta_i$$

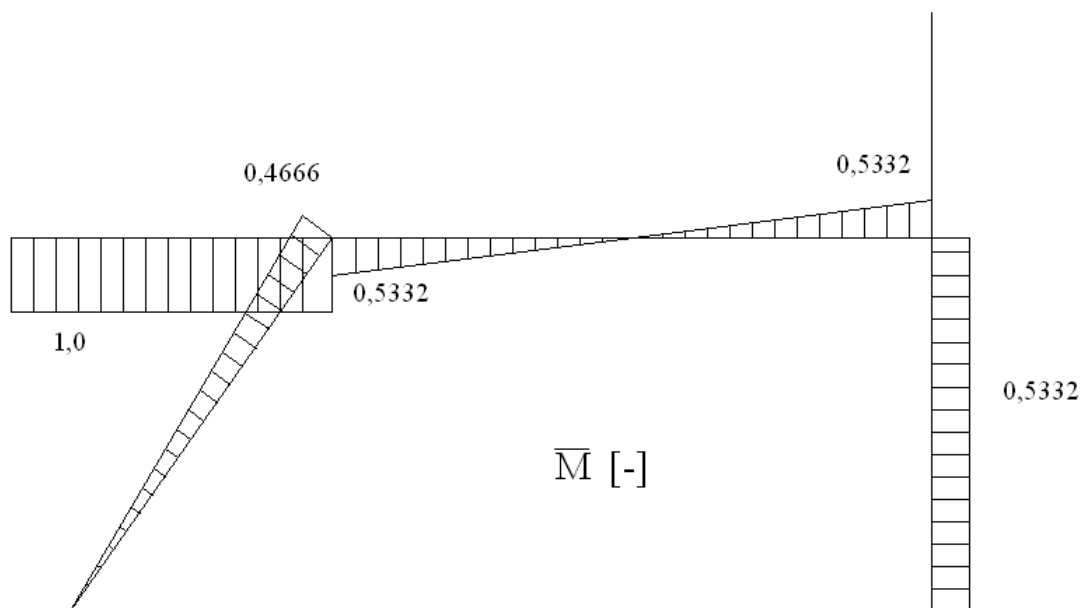
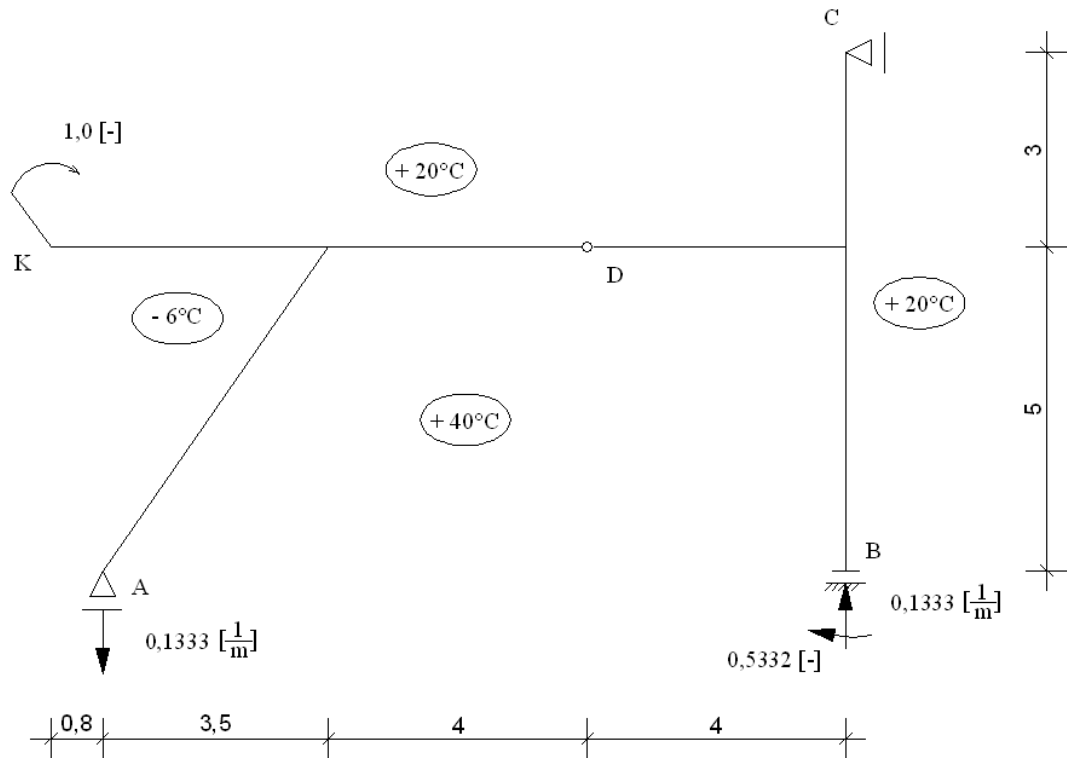
$$\delta_K \cdot \overline{1,0} = - (-0,4268 \cdot 0,04712 + 0,017 \cdot 0,1067 - 0,035 \cdot 1,1067)$$

$$\delta_K = - (-0,02011 + 0,001814 - 0,03873)$$

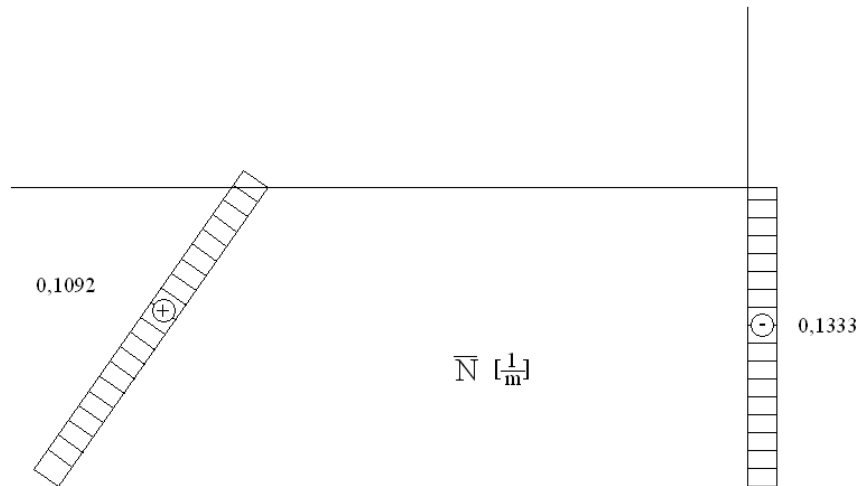
$$\delta_K = \mathbf{0,05703 \text{ m}}$$

**7. Obrót przekroju w punkcie K od wpływów termicznych:**

- $t_m = + 8^\circ\text{C}$
- $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \left[\frac{1}{^\circ\text{C}}\right]$
- $h = 0,33 \text{ m}$

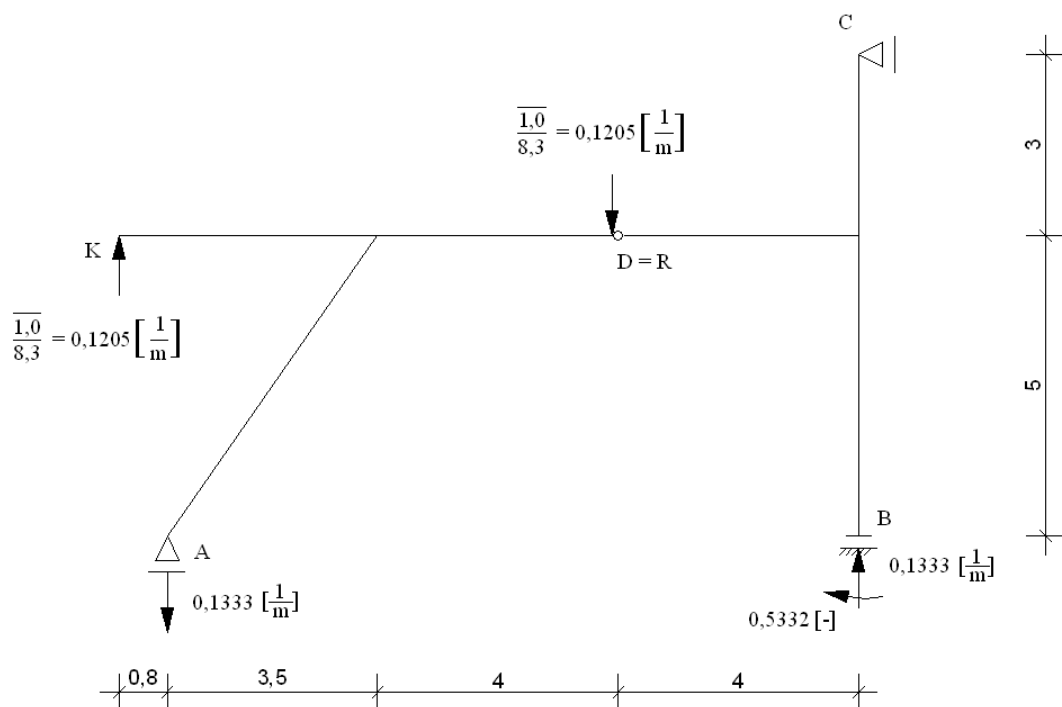


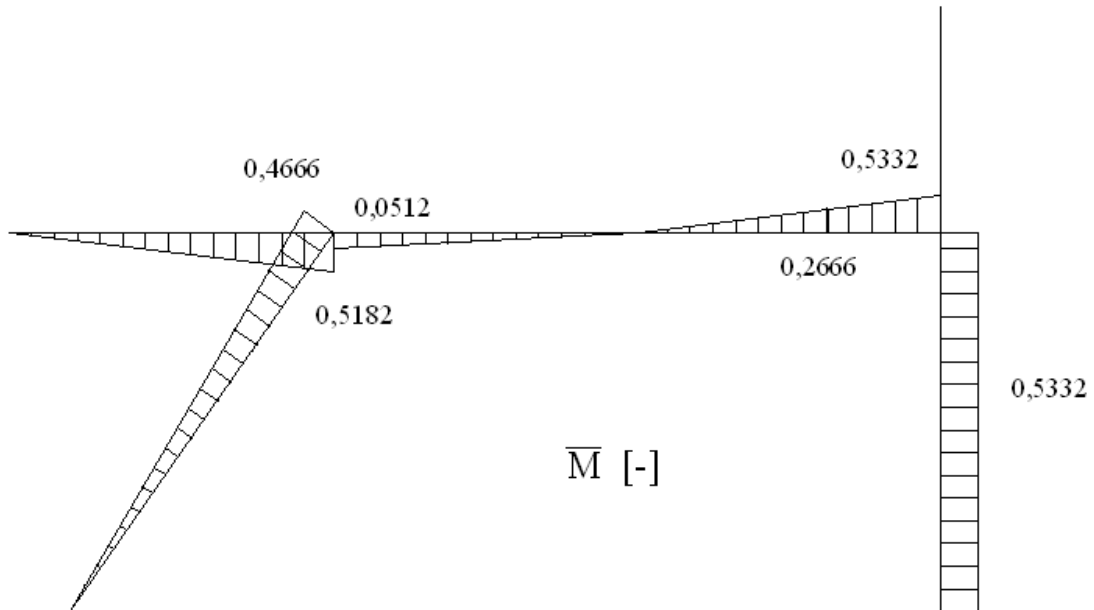




$$\begin{aligned} \varphi_K \cdot \overline{1,0} &= \sum \int \overline{M} \cdot \alpha_t \cdot \frac{|4t|}{h} dx + \sum \int \overline{N} \cdot \alpha_t \cdot t_0 dx \\ \varphi_K \cdot \overline{1,0} &= 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{|40-20|}{0,33} \left[ -0,5332 \cdot 5,0 - \frac{1}{2} \cdot 0,5332 \cdot 4,0 + \frac{1}{2} \cdot 0,5332 \cdot 4,0 \right] + \\ &+ 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{|40+6|}{0,33} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 0,4666 \cdot 6,1033 \right] + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{|20+6|}{0,33} \left[ -1,0 \cdot 4,3 \right] + \\ &+ 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \left( \frac{40+20}{2} - 8 \right) \cdot \left[ -0,1333 \cdot 5,0 \right] \\ &+ 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \left( \frac{40-6}{2} - 8 \right) \cdot \left[ 0,1092 \cdot 6,1033 \right] \\ \varphi_K &= 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 60,6061 \cdot (-2,666) + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 139,3939 \cdot (-1,4239) \\ &+ 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 78,7879 \cdot (-4,3) + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 22,0 \cdot (-0,6665) + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 9,0 \cdot 0,6665 \\ \varphi_K &= -0,001939 - 0,002382 - 0,004065 - 0,0001760 + 0,00007198 \\ \varphi_K &= -0,00849 \text{ rad} \end{aligned}$$

8. Obrót cięciwy *RK* od obciążenia zewnętrznego (wpływ *M*):





$$\varphi_{RK} \cdot \overline{1,0} = \sum \int \frac{M\overline{M}}{EI} \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \varphi_{RK} \cdot \overline{1,0} = & \frac{1}{24128,5} [0,5332 \cdot 5,0 \cdot 29,7704 + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 0,2666 \cdot (-\frac{2}{3} \cdot 39,6148 - \frac{1}{3} \cdot 49,2296) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 0,5332 \cdot (-\frac{1}{3} \cdot 39,6148 - \frac{2}{3} \cdot 49,2296) + \frac{1}{2} \cdot 2,0 \cdot 0,2666 \cdot (-\frac{2}{3} \cdot 39,6148) \\ & + \frac{1}{2} \cdot 4,0 \cdot 0,0512 \cdot (-\frac{2}{3} \cdot 79,2296) + \frac{1}{2} \cdot 4,3 \cdot 0,5182 \cdot (-\frac{2}{3} \cdot 126,6092) + \\ & + \frac{1}{2} \cdot 0,4666 \cdot 6,1033 \cdot (-\frac{2}{3} \cdot 47,4024) - \frac{2}{3} \cdot \frac{10,0 \cdot 5,0^2}{8} \cdot 6,1033 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,4666] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{RK} = & \frac{1}{24128,5} [79,3679 - 7,04087 - 4,3749 - 231,07949 - 7,04087 - 5,4087 - 94,03941 - \\ & - 44,9975 - 29,6646 = \frac{-344,2784}{24128,5} \end{aligned}$$

$$\varphi_{RK} = -0,01427 \text{ rad}$$