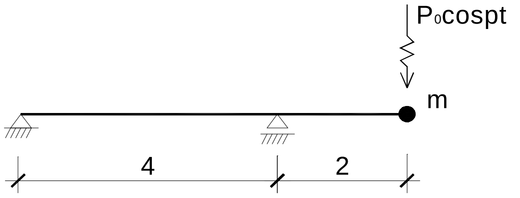
Wyznaczyć częstości drgań własnych oraz amplitudy drgań wymuszonych dla następującej belki:



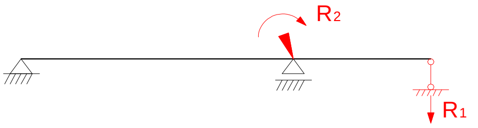
Dane:

EI=10^7 Nm^2
m = 500 kg
P_0 = 18000 N
p = 30 Hz

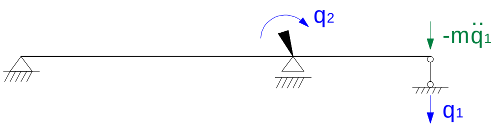
1. Sformułowanie przez sztywność

a) drgania własne

Stopień swobody dynamicznej SSD = 1



Układ podstawowy metody przemieszczeń
Stopień geometrycznej niewyznaczalności SGN = 2



Obciążenie:

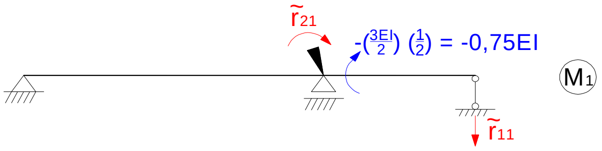
- „osiadania” dodanych więzów: q_1, q_2
- siła bezwładności: $B = -m\ddot{q}_1$

(siły bezwładności są siłami węzłowymi ⇒ w dynamice układów dyskretnych brak obciążenia przęsłowego)

Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń:

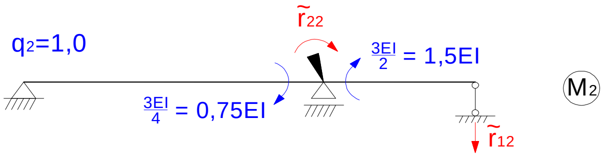
$$\begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{r}_{11} q_1 + \tilde{r}_{12} q_2 + R_{1P} = 0 \\ \tilde{r}_{21} q_1 + \tilde{r}_{22} q_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

Wyznaczenie współczynników $\tilde{r}_{ik}$; R_{iP}:



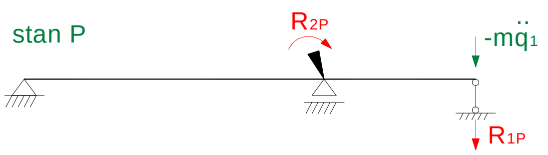
$$\tilde{r}_{21} = -0{,}75EI$$

$$\tilde{r}_{11} \cdot \bar{1} - 0{,}75EI \cdot \frac{\bar{1}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{r}_{11} = 0{,}375EI$$



$$\tilde{r}_{22} = 0{,}75EI + 1{,}5EI = 2{,}25EI$$

$$\tilde{r}_{12} \cdot \bar{1} + 1{,}5EI \cdot \frac{\bar{1}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{r}_{12} = -0{,}75EI$$



$$R_{2P} = 0$$

$$R_{1P} \cdot \bar{1} - m\ddot{q}_1 \cdot \bar{1} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{1P} = m\ddot{q}_1$$

Ponieważ $R_{2P}=0$, z drugiego równania: $q_2=-\dfrac{\tilde{r}_{21}}{\tilde{r}_{22}}q_1$

stąd:

$$\tilde{r}_{11}q_1-\tilde{r}_{12}\frac{\tilde{r}_{21}}{\tilde{r}_{22}}q_1+R_{1P}=0$$

$$q_1r_{11}+m\ddot{q}_1=0$$

Podstawiając:

$$q_1=A_1\cos\omega t$$
$$\dot{q}_1=-A_1\omega\sin\omega t$$
$$\ddot{q}_1=-A_1\omega^2\cos\omega t$$

otrzymujemy:

$$r_{11}A_1\cos\omega t-mA_1\omega^2\cos\omega t=0$$
$$A_1\cos\omega t\left(r_{11}-m\omega^2\right)=0$$

gdzie: $r_{11}=\tilde{r}_{11}-\dfrac{\tilde{r}_{12}^{\,2}}{\tilde{r}_{22}}$

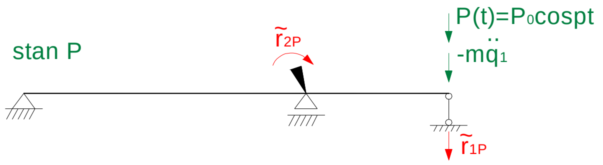
Nietrywialne rozwiązanie powyższego równania:

$$r_{11}-m\omega^2=0$$

$$\omega^2=\frac{r_{11}}{m}\quad\rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{r_{11}}{m}}$$

$$r_{11}=0{,}375EI-\frac{(-0{,}75EI)^2}{2{,}25EI}=0{,}125EI\quad\rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{0{,}125\cdot10^7}{500}}=\mathbf{50{,}0\,\frac{rad}{s}}$$

b) drgania wymuszone:



Obciążenie:

- „osiadania” dodanych więzów: q_1, q_2
- siła bezwładności: $B=m\ddot{q}_1$
- siła wymuszająca $P(t)$

Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń:

$$\begin{cases}R_1=0\\R_2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\tilde{r}_{11}q_1+\tilde{r}_{12}q_2+R_{1P}=0\\\tilde{r}_{21}q_1+\tilde{r}_{22}q_2+R_{2P}=0\end{cases}$$

Współczynniki R_{iP}:

$$R_{2P}=0$$

$$R_{1P}\cdot\bar{1}-m\ddot{q}_1\cdot\bar{1}+P_0\cos pt\cdot\bar{1}=0\quad\rightarrow\quad R_{1P}=m\ddot{q}_1-P_0\cos pt$$

Ponieważ $R_{2P}=0$, z drugiego równania: $q_2=-\dfrac{\tilde{r}_{21}}{\tilde{r}_{22}}q_1$

stąd:

$$\tilde{r}_{11}q_1-\tilde{r}_{12}\frac{\tilde{r}_{21}}{\tilde{r}_{22}}q_1+R_{1P}=0$$

$$q_1r_{11}+m\ddot{q}_1=P_0\cos pt$$

Podstawiając:

$$q_1=A_1\cos pt$$
$$\dot{q}_1=-A_1p\sin pt$$
$$\ddot{q}_1=-A_1p^2\cos pt$$

otrzymujemy:

$$r_{11}A_1\cos pt-mA_1p^2\cos pt=P_0\cos pt$$
$$\cos pt\left(r_{11}A_1-mA_1p^2\right)=P_0\cos pt$$
$$A_1(r_{11}-mp^2)=P_0$$
$$A_1=\frac{P_0}{r_{11}-mp^2}$$

Stąd:

$$A_1 = \frac{18000}{0{,}125 \cdot 10^7 - 500 \cdot (30 \cdot 2\pi)^2} = \mathbf{-0{,}00109m}$$

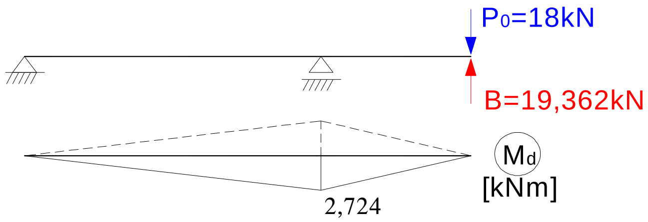
Obliczenie amplitudy siły bezwładności:

$$B = -m \cdot \ddot{q}_1 = m \cdot A_1 \cdot p^2 \cos pt$$

dla $\cos pt = 1$:

$$B = 500 \cdot (30 \cdot 2\pi)^2 \cdot (-0{,}00109) = -19362{,}4N$$

Obwiednia momentów dynamicznych:



2. Sformułowanie przez podatność

a) drgania własne

Stopień swobody dynamicznej SSD = 1
Równanie ruchu:

$$q_1 = \delta_{11}(-m\ddot{q}_1)$$
$$q_1 + \delta_{11} m \ddot{q}_1 = 0$$

Podstawiając:

$$q_1 = A_1 \cos \omega t$$
$$\dot{q}_1 = -A_1 \omega \sin \omega t$$
$$\ddot{q}_1 = -A_1 \omega^2 \cos \omega t$$

otrzymujemy:

$$A_1 \cos \omega t - \delta_{11} m A_1 \omega^2 \cos \omega t = 0$$
$$A_1 \cos \omega t (1 - \delta_{11} m \omega^2) = 0$$

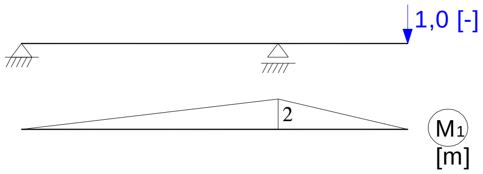
Nietrywialne rozwiązanie powyższego równania:

$$1 - \delta_{11} m \omega^2 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}}$$

gdzie: $\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} dx$; $\delta_{11} = \frac{1}{r_{11}}$

Obliczenie współczynnika δ_{11}:



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\right) = \frac{8}{EI}$$

stąd: $\omega = \sqrt{\frac{EI}{8 \cdot 500}} = \mathbf{50{,}0 \frac{rad}{s}}$

b) drgania wymuszone

Równanie ruchu:

$$q_1 = \delta_{11}\left(-m\ddot{q}_1\right) + \delta_{11} P(t)$$
$$q_1 + \delta_{11} m \ddot{q}_1 = \delta_{11} P_0 \cos pt$$

Podstawiając:

$$q_1 = A_1 \cos pt$$
$$\dot{q}_1 = -A_1 p \sin pt$$
$$\ddot{q}_1 = -A_1 p^2 \cos pt$$

otrzymujemy:

$$A_1 \cos pt - \delta_{11} m A_1 p^2 \cos pt = \delta_{11} P_0 \cos pt$$
$$A_1 (1 - \delta_{11} m p^2) = \delta_{11} P_0$$
$$A_1 = \frac{\delta_{11} P_0}{1 - \delta_{11} m p^2}$$

podstawiając $\delta_{11} = \dfrac{1}{r_{11}}$,

otrzymujemy j/w:

$$A_1 = \frac{P_0}{r_{11} - m p^2}$$

Stąd:

$$A_1 = \frac{\frac{8}{10^7} \cdot 18000}{1 - \frac{8}{10^7} \cdot 500 \cdot (30 \cdot 2\pi)^2} = \mathbf{-0{,}00109m}$$

Obwiednia momentów dynamicznych jak wyżej.