

Macierzowa wersja metody przemieszczeń - belki

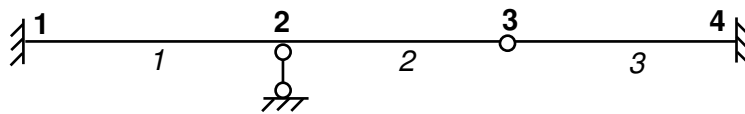
1. Wstęp. Koncepcja metody

Macierzowe ujęcie metody przemieszczeń stanowi jej wersję ułatwiającą komputeryzację algorytmu obliczeń. W odniesieniu do zastosowania w obliczaniu belek, wszystkie założenia klasycznej mechaniki pozostają w mocy.

W porównaniu z klasyczną metodą przemieszczeń zasadniczą różnicą jest zastosowanie zapisu macierzowego.

Podstawowa koncepcja metody się nie zmienia. Układ belkowy złożony z kilku pręseł dzielony jest na elementy, punkty łączące elementy to węzły. Podstawowymi niewiadomymi pozostają przemieszczenia węzłowe – ugięcia i kąty obrotu przekrojów. W najprostszym ujęciu metody w węzłach przegubowych nie wprowadza się kątów obrotu przekrojów (redukcja statyczna).

W konsekwencji w bazie podstawowych elementów belkowych należy uwzględnić trzy typy: obustronnie utwierdzony, z przegubem na lewym końcu i z przegubem na prawym końcu.



1, 2, 3 – numery elementów

1, 2, 3, 4 – numery węzłów

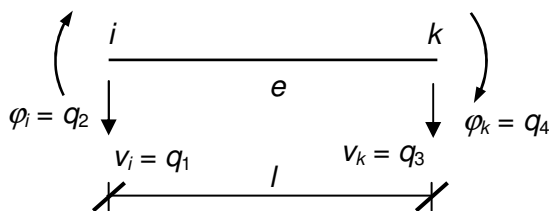
W przykładowej belce węzły 1, 2 i 4 mają po dwie niewiadome - ugięcie i obrót, natomiast przegubowy węzeł 3 – tylko ugięcie.

Element 1 jest obustronnie utwierdzony, element 2 – z przegubem na prawym końcu, element 3 – z przegubem na lewym końcu.

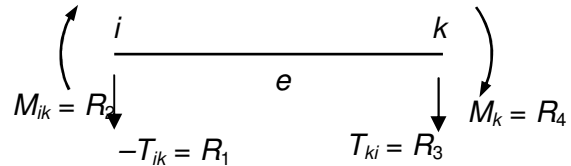
2. Element obustronnie utwierdzony

Rozważamy płaski element belkowy e o długości l i sztywności giętej EI .

przemieszczenia węzłowe



reakcje węzłowe



Przemieszczenia węzłowe tworzą wektor przemieszczeń węzłowych elementu \mathbf{q}_e , a reakcje węzłowe – wektor reakcji węzłowych elementu \mathbf{R}_e

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{ik} \\ M_{ik} \\ T_{ki} \\ M_{ki} \end{bmatrix}$$

Związek między tymi dwoma wektorami ma postać

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad \mathbf{K}_e = [k_{ej}]_{4 \times 4} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

gdzie \mathbf{K}_e jest macierzą sztywności elementu obustronnie utwierdzonego o wymiarze 4×4 . Każdy składnik tej macierzy to współczynnik sztywności definiowany, tak jak r_{ik} w klasycznej metodzie przemieszczeń. To znaczy, że k_{eij} przedstawia wartość reakcji w kierunku i wywołaną jednostkowym przemieszczeniem $q_j = 1$ w kierunku j . Wartości tych współczynników można określić na podstawie wzorów transformacyjnych klasycznej metody przemieszczeń. Dla momentów węzłowych mamy:

$$R_2 = M_{ik} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_i + \varphi_k - 3\psi_{ik}) = \frac{2EI}{l}\left(2q_2 + q_4 - 3\frac{q_3 - q_1}{l}\right) = \frac{6EI}{l^2}q_1 + \frac{4EI}{l}q_2 - \frac{6EI}{l^2}q_3 + \frac{2EI}{l}q_4$$

$$R_4 = M_{ki} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_k + \varphi_i - 3\psi_{ik}) = \frac{2EI}{l}\left(2q_4 + q_2 - 3\frac{q_3 - q_1}{l}\right) = \frac{6EI}{l^2}q_1 + \frac{2EI}{l}q_2 - \frac{6EI}{l^2}q_3 + \frac{4EI}{l}q_4$$

Wykorzystując warunki równowagi reakcji w rozważanym elemencie, wobec braku obciążenia siłami zewnętrznymi, można wyrazić siły poprzeczne węzłowe jako

$$T_{ik} = T_{ki} = -\frac{M_{ik} - M_{ki}}{l}$$

co pozwala zapisać

$$R_1 = -T_{ik} = \frac{6EI}{l^2}(\varphi_i + \varphi_k - 2\psi_{ik}) = \frac{6EI}{l^2}\left(q_2 + q_4 - 2\frac{q_3 - q_1}{l}\right) = \frac{12EI}{l^3}q_1 + \frac{6EI}{l^2}q_2 - \frac{12EI}{l^3}q_3 + \frac{6EI}{l^2}q_4$$

$$R_2 = T_{ki} = -R_1 = -\frac{12EI}{l^3}q_1 - \frac{6EI}{l^2}q_2 + \frac{12EI}{l^3}q_3 - \frac{6EI}{l^2}q_4$$

Każdy z wyprowadzonych wzorów na reakcje, zgodnie z definicją współczynników sztywności, zawiera elementy kolejnych wierszy macierzy sztywności. W związku z tym

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & 4EI & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & 4EI \end{bmatrix}$$

Należy stwierdzić, że zależność

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e$$

stanowi macierzowy zapis wzorów transformacyjnych na momenty zginające i siły poprzeczne. Warto też zwrócić uwagę na symetrię macierzy \mathbf{K}_e . Ta cecha wynika wprost z twierdzenia Rayleigha o wzajemności reakcji, które wymaga, aby zawsze spełniona była zależność

$$k_{eij} = k_{eji}$$

3. Elementy z przegubami

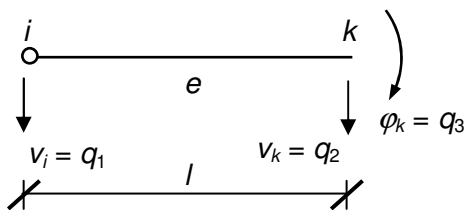
W przypadku elementów z przegubami wykorzystujemy fakt, że moment zginający w przegubie jest równy zero, co pozwala pominąć wpływ kąta obrotu przekroju przy przegubie. W wyniku tzw. redukcji statycznej wyprowadzone w takim przypadku wzory transformacyjne nie zawierają tych kątów obrotu. W tej sytuacji zmniejsza się wymiar wektora przemieszczeń węzłowych, reakcji węzłowych i macierzy sztywności. W przypadku pręta z przegubem z lewej strony mamy

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} v_i \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{ik} \\ T_{ki} \\ M_{ki} \end{bmatrix}$$

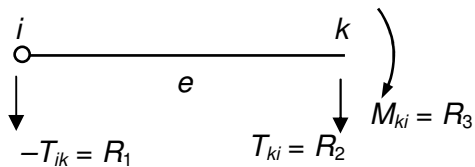
oraz

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad \mathbf{K}_e = [k_{eij}]_{3 \times 3} \quad i, j=1,2,3$$

przemieszczenia węzłowe



reakcje węzłowe



Wykorzystując wzór transformacyjny na moment utwierdzenia otrzymujemy

$$R_3 = M_{ki} = \frac{3EI}{l}(\varphi_k - \psi_{ik}) = \frac{3EI}{l}\left(q_3 - \frac{q_2 - q_1}{l}\right) = \frac{3EI}{l^2}q_1 - \frac{3EI}{l^2}q_2 + \frac{3EI}{l}q_3$$

Podobnie jak w elemencie obustronnie utwierdzonym warunek równowagi daje

$$T_{ik} = T_{ki} = \frac{-M_{ki}}{l}$$

co pozwala zapisać

$$R_1 = -T_{ik} = \frac{3EI}{l^2}(\varphi_i - \psi_{ik}) = \frac{3EI}{l^2}\left(q_3 - \frac{q_2 - q_1}{l}\right) = \frac{3EI}{l^3}q_1 - \frac{3EI}{l^3}q_2 + \frac{3EI}{l^2}q_3$$

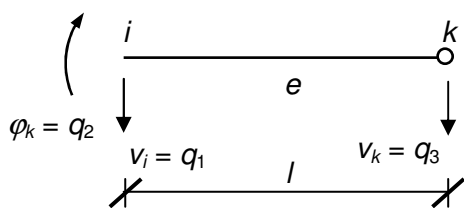
$$R_2 = T_{ik} = -R_1 = -\frac{3EI}{l^3}q_1 + \frac{3EI}{l^3}q_2 - \frac{3EI}{l^2}q_3$$

Ostatecznie macierz sztywności pręta z przegubem z lewej strony ma postać

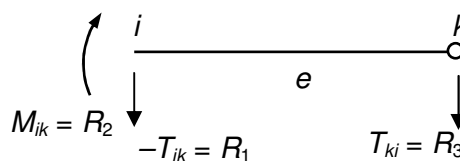
$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}$$

W przypadku pręta z przegubem z prawej strony mamy

przemieszczenia węzłowe



reakcje węzłowe



$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_e = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{ik} \\ M_{ik} \\ T_{ki} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad \mathbf{K}_e = [k_{ej}]_{3 \times 3} \quad i, j=1,2,3$$

Po wykorzystaniu właściwych wzorów transformacyjnych otrzymuje się macierz sztywności elementu z przegubem z prawej strony w postaci

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix}$$

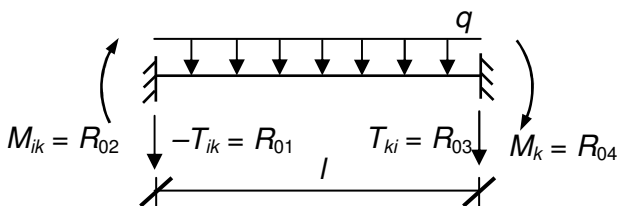
4. Obciążenia przęsłowe

Podobnie jak w przypadku metody klasycznej, wpływ obciążeń przęsłowych na momenty węzłowe powinien być uwzględniony we wzorach transformacyjnych. W ujęciu macierzowym wymagane jest więc uwzględnienie dodatkowych reakcji węzłowych w wektorze \mathbf{R}_e . Te dodatkowe reakcje są zebrane w elementowym wektorze \mathbf{R}_{0e} i dodane do równań elementu. Otrzymujemy

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{R}_{0e}$$

Wartości tych reakcji, podobnie jak w ujęciu klasycznym, zależą od rodzaju obciążenia przęsłowego oraz od typu elementu. W każdym przypadku można posłużyć się wynikami przedstawianymi w tablicach inżynierskich, można też rozwiązać statykę danego pręta statycznie niewyznaczalnego metodą sił. Warto podkreślić, że informacja o wartościach reakcji węzłowych stosowanych typów elementów pochodzących od oddziaływań zewnętrznych musi stanowić fragment podstawowej bazy danych metody przemieszczeń, łącznie z wzorami transformacyjnymi (macierzami sztywności), bez której stosowanie metody, zarówno w ujęciu klasycznym, jak i macierzowym jest niemożliwe.

Przykładowo, w elemencie obustronnie utwierdzonym obciążonym równomiernie



$$\mathbf{R}_{0e} = \begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \\ R_{03} \\ R_{04} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{ik} \\ M_{ik} \\ T_{ki} \\ M_{ki} \end{bmatrix}$$

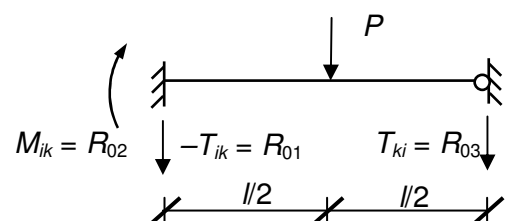
Wykorzystując dane z tablic inżynierskich znajdujemy:

$$M_{ik} = -M_{ki} = -\frac{ql^2}{12} \quad T_{ik} = -T_{ki} = \frac{ql}{2}$$

i ostatecznie

$$\mathbf{R}_{0e} = \begin{bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ \frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \end{bmatrix}$$

Podobnie w przypadku pręta z przegubem z prawej strony, obciążonego siłą skupioną w środku rozpiętości



$$\mathbf{R}_{0e} = \begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \\ R_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{ik} \\ M_{ik} \\ T_{ki} \end{bmatrix}$$

W tym przypadku na podstawie tablic mamy

$$M_{ik} = -\frac{3Pl}{16} \quad T_{ik} = \frac{11}{16}P \quad T_{ki} = -\frac{5}{16}P$$

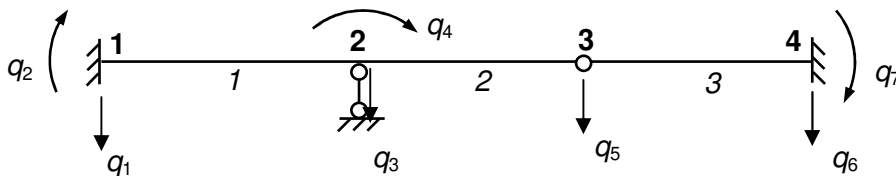
i ostatecznie

$$\mathbf{R}_{0e} = \begin{bmatrix} -\frac{11P}{16} \\ \frac{3Pl}{16} \\ \frac{11P}{16} \\ \frac{5P}{16} \end{bmatrix}$$

Należy zwrócić uwagę, że w każdym przypadku wymiar wektora \mathbf{R}_{0e} jest identyczny z wymiarem wektorów \mathbf{q}_e i \mathbf{R}_e .

5. Globalna numeracja przemieszczeń węzłowych. Równania kanoniczne

W analizie belki wieloprzęsłowej złożonej z dowolnej liczby elementów, oprócz numeracji przemieszczeń węzłowych związanych z poszczególnymi elementami, należy wprowadzić numerację globalną przemieszczeń. Na tym etapie rozwiązywania zadania nie uwzględnia się podpór, wszystkie przemieszczenia węzłowe traktowane są równorzędnie. W związku z tym w przypadku belki przedstawionej na początku mamy



Należy zwrócić uwagę, że globalne numery przemieszczeń nie mają nic wspólnego z numeracją węzłów ani elementów. Ponadto warto wiedzieć, że zachowanie kolejności przemieszczeń w układzie: ugięcie, kąt obrotu przekroju, kolejno węzłami od lewej do prawej strony nie jest konieczne, ale zdecydowanie upraszcza opis i obliczenia.

Wprowadzone siedem przemieszczeń węzłowych tworzy globalny wektor przemieszczeń węzłowych \mathbf{q} dla całej belki

$$\mathbf{q} = \text{col}[q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7]$$

Każdemu z przemieszczeń w wektorze \mathbf{q} odpowiada reakcja. Reakcje te występują albo w rzeczywistych podporach belki, albo w podporach fikcyjnych, które dodaje się do układu w celu zbudowania układu podstawowego metody przemieszczeń. W wersji macierzowej, na tym etapie rozwiązywania, nie rozróżnia się tych typów podpór. Otrzymujemy więc wektor reakcji \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \text{col}[R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6 \ R_7]$$

Pomiędzy wektorami \mathbf{q} i \mathbf{R} zachodzi związek analogiczny do związku na poziomie każdego elementu, czyli

$$\mathbf{R} = \mathbf{Kq}$$

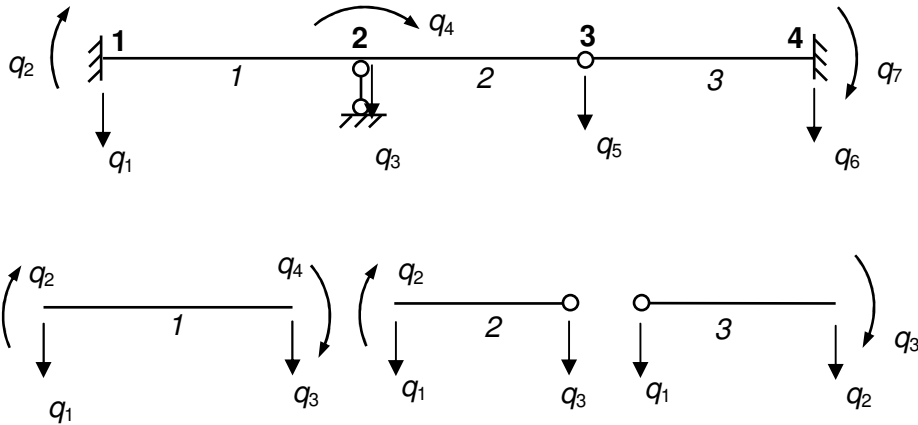
Macierz \mathbf{K} jest globalną macierzą sztywności belki. Jej wymiar jest równy liczbie niewiadomych przemieszczeń belki, w rozważanym przypadku wynosi on 7×7 .

W przypadku istnienia obciążeń przęsłowych powyższe równanie należy uzupełnić o wpływ tych obciążeń na globalne reakcje \mathbf{R} , podobnie jak na poziomie elementu. Wprowadzamy więc globalny wektor reakcji węzłowych \mathbf{R}_0 wywołanych obciążeniem przęsłowym

$$\mathbf{R} = \mathbf{Kq} + \mathbf{R}_0$$

Na współczynniki sztywności w globalnej macierzy \mathbf{K} składają się współczynniki sztywności macierzy \mathbf{K}_e poszczególnych elementów. Podobnie, na reakcje globalne w wektorze \mathbf{R}_0 składają się reakcje z wektorów elementowych \mathbf{R}_{0e} . Proces składania macierzy \mathbf{K} i wektora \mathbf{R}_0 nazywa się

agregacją. W celu jego automatyzacji tworzy się tablicę powiązań. W tej tablicy zapisane są powiązania pomiędzy elementową numeracją przemieszczeń, oddzielnie dla każdego elementu, a globalną numeracją przemieszczeń dla całej belki. Aby wypełnić tablicę powiązań rozważa się "nałożenie" poszczególnych elementów z ich numeracją przemieszczeń, na całą belkę z numeracją globalną. W naszym przypadku mamy



Istotne jest, by numeracja na poziomie każdego elementu była identyczna z przedstawioną wcześniej przy wyprowadzaniu macierzy sztywności elementowych!

Teraz możemy zauważyć, że w przypadku elementu 1, kolejne przemieszczenia elementowe 1, 2, 3, 4 odpowiadają czterem przemieszczeniom z numeracją globalną 1, 2, 3, 4. W przypadku elementu 2 trzema przemieszczeniami 1, 2, 3 odpowiadają przemieszczenia globalne 3, 4, 5. W elemencie 3, trzema przemieszczeniami 1, 2, 3 odpowiadają przemieszczenia globalne 5, 6, 7. Te wyniki można zestawić w tablicy powiązań

Numer elementu	Numery przemieszczeń			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	–
3	5	6	7	–

← numery przemieszczeń elementu 1–4 lub 1–3, indeksy i, j

} globalne numery przemieszczeń 1–7, indeksy m, n

Przedstawmy macierze sztywności trzech elementów belki w postaci:

$$\mathbf{K}_1 = [k_{1ij}]_{4 \times 4} \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathbf{K}_2 = [k_{2ij}]_{3 \times 3} \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{K}_3 = [k_{3ij}]_{3 \times 3} \quad i, j = 1, 2, 3$$

Składniki macierzy sztywności \mathbf{K}_1 elementu 1 k_{1ij} odpowiadają składnikom globalnej macierzy sztywności \mathbf{K} całej belki k_{mn} . To przypisanie odbywa się przez zamianę indeksów i, j na indeksy m, n według klucza z tablicy powiązań. I tak składnik k_{111} macierzy \mathbf{K}_1 stanie się składnikiem k_{11} macierzy \mathbf{K} , $k_{112} - k_{12}$, $k_{113} - k_{13}$, i tak dalej aż do $k_{144} - k_{44}$.

W przypadku elementu 2, składnik k_{211} macierzy \mathbf{K}_2 stanie się składnikiem k_{33} macierzy \mathbf{K} , $k_{212} - k_{34}$, $k_{213} - k_{35}$, i tak dalej aż do $k_{233} - k_{55}$.

W przypadku elementu 3, składnik k_{311} macierzy \mathbf{K}_3 stanie się składnikiem k_{55} macierzy \mathbf{K} , $k_{312} - k_{56}$, $k_{313} - k_{57}$, i tak dalej aż do $k_{233} - k_{77}$.

W ten sposób poszczególne składniki macierzy elementowych wypełniają macierz sztywności globalną \mathbf{K} . Obowiązuje przy tym zasada sumowania – jeśli do jednego składnika macierzy globalnej przypada więcej składników elementowych. Poza tym należy przenieść do macierzy globalnej wszystkie składniki wszystkich macierzy elementowych.

układzie równań są nieprzydatne na etapie budowania końcowych równań kanonicznych. Ostatecznie więc można zapisać globalne równania kanoniczne metody przemieszczeń w postaci

$$\mathbf{R}_{red} = \mathbf{K}_{red} \mathbf{q}_{red} + \mathbf{R}_{0red} = \mathbf{0}$$

a w rozważanym przypadku belki

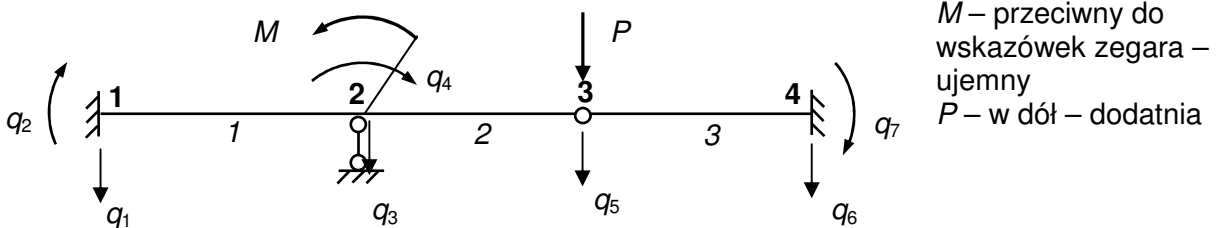
$$\begin{bmatrix} R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{144} + k_{222}) & k_{223} \\ k_{232} & (k_{233} + k_{311}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{014} + R_{022} \\ R_{023} + R_{031} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Podsumowując można stwierdzić, że macierz \mathbf{K}_{red} powstaje przez wykreślenie z macierzy \mathbf{K} wierszy i kolumn o numerach odpowiadających zerowym przemieszczeniom węzłowym, w tym przypadku 1, 2, 3, 6 i 7. Podobnie wektor \mathbf{R}_{0red} powstaje przez wykreślenie elementów o tych numerach z wektora \mathbf{R}_0 .

7. Obciążenia węzłowe

W przypadku gdy na belkę działają obciążenia węzłowe, należy je uwzględnić bezpośrednio w zredukowanym układzie równań globalnych. Siła przyłożona do węzła, w którym występuje niewiadome przemieszczenie, zastępuje zerową wartość globalnej reakcji. Jeśli siła ma zwrot zgodny ze zwrotem ugięcia (w dół) to jej wartość po prawej stronie układu równań ma znak dodatni. Podobnie, moment skupiony przyłożony w węzle z niewiadomym kątem obrotu pojawi się jako dodatni po prawej stronie układu równań, jeśli jego zwrot jest zgodny z dodatnim zwrotem kąta (zgodnie ze wskazówkami zegara).

Przykładowe obciążenia węzłowe analizowanej belki i ich efekty w wektorze prawych stron układu równań pokazano poniżej.



$$\begin{bmatrix} R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{144} + k_{222}) & k_{223} \\ k_{232} & (k_{233} + k_{311}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{014} + R_{022} \\ R_{023} + R_{031} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M \\ P \end{bmatrix}$$

W ogólności ostateczny układ równań metody przemieszczeń można przedstawić w postaci

$$\mathbf{K}_{red} \mathbf{q}_{red} = \mathbf{P}_{red} - \mathbf{R}_{0red}$$

gdzie wektor \mathbf{P}_{red} jest wektorem zerowym w przypadku braku obciążeń węzłowych, a w przypadku ich obecności – zawiera wartości przyłożonych uogólnionych sił węzłowych.

8. Obliczenie niewiadomych przemieszczeń oraz końcowych sił wewnętrznych w belce

Układ równań w postaci ostatecznej można rozwiązać i obliczyć wartości globalnych przemieszczeń węzłowych. W analizowanej belce obliczymy w ten sposób wartości kąta obrotu przekroju q_4 i ugięcia q_5 .

Na podstawie tablicy powiązań można stwierdzić, że q_4 jest czwartym przemieszczeniem węzłowym elementu 1 i drugim przemieszczeniem węzłowym elementu 2. Z kolei q_5 jest trzecim przemieszczeniem węzłowym elementu 2 i pierwszym przemieszczeniem węzłowym elementu 3. Wszystkie pozostałe przemieszczenia węzłowe są równe zero. W ten sposób można zbudować pełne wektory przemieszczeń węzłowych elementów belki

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} q_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Następnie korzystając z równań elementów, do których należy podstawić obliczone wcześniej macierze sztywności elementów \mathbf{K}_e oraz wektory reakcji węzłowych wywołanych obciążeniem przęsłowym elementów \mathbf{R}_{0e} , można obliczyć ich wektory reakcji węzłowych \mathbf{R}_e

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_1 + \mathbf{R}_{01}$$

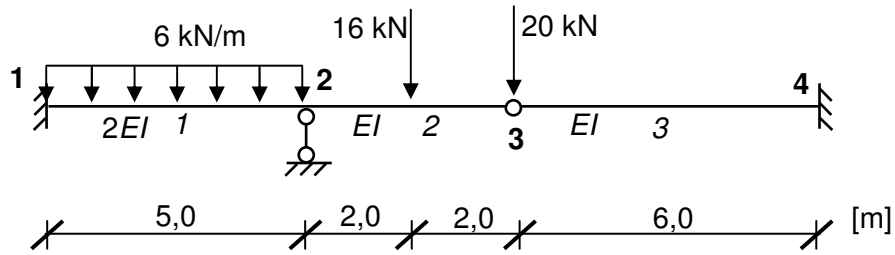
$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_2 + \mathbf{R}_{02}$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{K}_3 \mathbf{q}_3 + \mathbf{R}_{03}$$

Wartości reakcji zawartych w tych wektorach można interpretować jako klasyczne siły węzłowe, momenty zginające i siły poprzeczne zgodnie z zależnościami podanymi wcześniej przy omawianiu poszczególnych typów elementów. Na ich podstawie można obliczyć reakcje podporowe w belce, co pozwala na wykonanie globalnej kontroli statycznej, jak w klasycznej wersji metody przemieszczeń.

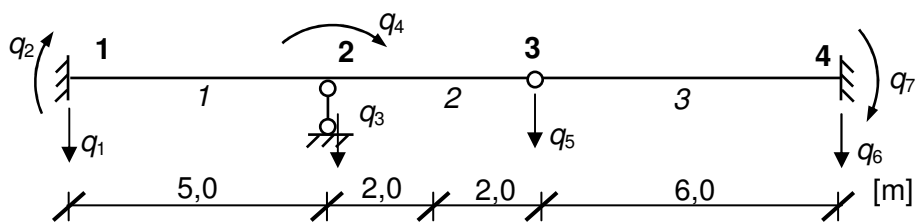
Po takim wykazaniu poprawności obliczeń, dysponując wartościami węzłowymi momentów zginających i sił poprzecznych, można sporządzić ostateczne wykresy sił wewnętrznych w belce.

Przykład liczbowy



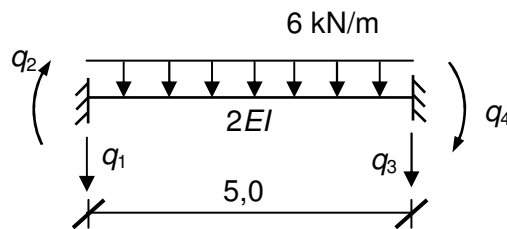
Uwaga – obliczenia będą przeprowadzone dla wielkości wyrażonych w spójnym systemie jednostek: kN, kNm, m, rad

Niewiadome przemieszczenia węzłowe



Pręty - elementy

1



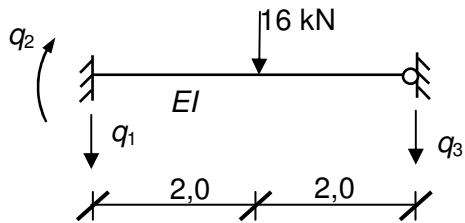
Macierz sztywności ($EI \rightarrow 2EI$)

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot 2EI}{l^3} & \frac{6 \cdot 2EI}{l^2} & -\frac{12 \cdot 2EI}{l^3} & \frac{6 \cdot 2EI}{l^2} \\ \frac{6 \cdot 2EI}{l^2} & \frac{4 \cdot 2EI}{l} & -\frac{6 \cdot 2EI}{l^2} & \frac{2 \cdot 2EI}{l} \\ -\frac{12 \cdot 2EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot 2EI}{l^2} & \frac{12 \cdot 2EI}{l^3} & -\frac{6 \cdot 2EI}{l^2} \\ \frac{6 \cdot 2EI}{l^2} & \frac{2 \cdot 2EI}{l} & -\frac{6 \cdot 2EI}{l^2} & \frac{4 \cdot 2EI}{l} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,1920 & 0,4800 & -0,1920 & 0,4800 \\ 0,4800 & 1,600 & -0,4800 & 0,8000 \\ -0,1920 & -0,4800 & 0,1920 & -0,4800 \\ 0,4800 & 0,8000 & -0,4800 & 1,600 \end{bmatrix}$$

Wektor reakcji węzłowych od obciążenia przęsłowego

$$\mathbf{R}_{01} = \begin{bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15,00 \\ -12,50 \\ -15,00 \\ 12,50 \end{bmatrix}$$

2



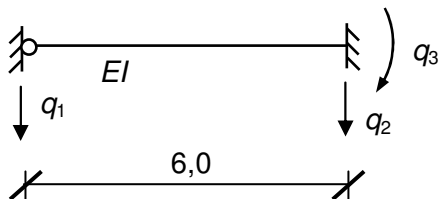
Macierz sztywności

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,04688 & 0,1875 & -0,04688 \\ 0,1875 & 0,7500 & -0,1875 \\ -0,04688 & -0,1875 & 0,04688 \end{bmatrix}$$

Wektor reakcji węzłowych od obciążenia przęsłowego

$$\mathbf{R}_{02} = \begin{bmatrix} -\frac{11P}{16} \\ \frac{16}{3Pl} \\ -\frac{16}{5P} \\ \frac{16}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11,00 \\ -12,00 \\ -5,000 \end{bmatrix}$$

3



Macierz sztywności

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 0,01389 & -0,01389 & 0,08333 \\ -0,01389 & 0,01389 & -0,08333 \\ 0,08333 & 0,08333 & 0,5000 \end{bmatrix}$$

Wektor reakcji węzłowych od obciążenia przęsłowego

$$\mathbf{R}_{03} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tablica powiązań

Numer elementu	Numery przemieszczeń			
	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	5	—
3	5	6	7	—

Po jego rozwiązaniu otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 43,26 \\ 544,9 \end{bmatrix}$$

Na podstawie tablicy powiązań określamy wektory przemieszczeń elementowych

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 43,26 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 43,26 \\ 544,9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 544,9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektory końcowych reakcji węzłowych obliczamy z równań elementów:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_1 + \mathbf{R}_{01} = EI \begin{bmatrix} 0,1920 & 0,4800 & -0,1920 & 0,4800 \\ 0,4800 & 1,600 & -0,4800 & 0,8000 \\ -0,1920 & -0,4800 & 0,1920 & -0,4800 \\ 0,4800 & 0,8000 & -0,4800 & 1,600 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 43,26 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15,00 \\ -12,50 \\ -15,00 \\ 12,50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,765 \\ 22,11 \\ -35,76 \\ 81,72 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_2 + \mathbf{R}_{02} = EI \begin{bmatrix} 0,04688 & 0,1875 & -0,04688 \\ 0,1875 & 0,7500 & -0,1875 \\ -0,04688 & -0,1875 & 0,04688 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 43,26 \\ 544,9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11,00 \\ -12,00 \\ -5,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28,43 \\ -81,72 \\ 12,43 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{K}_3 \mathbf{q}_3 + \mathbf{R}_{03} = EI \begin{bmatrix} 0,01389 & -0,01389 & 0,08333 \\ -0,01389 & 0,01389 & -0,08333 \\ 0,08333 & 0,08333 & 0,5000 \end{bmatrix} \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 544,9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,569 \\ -7,569 \\ 45,41 \end{bmatrix}$$

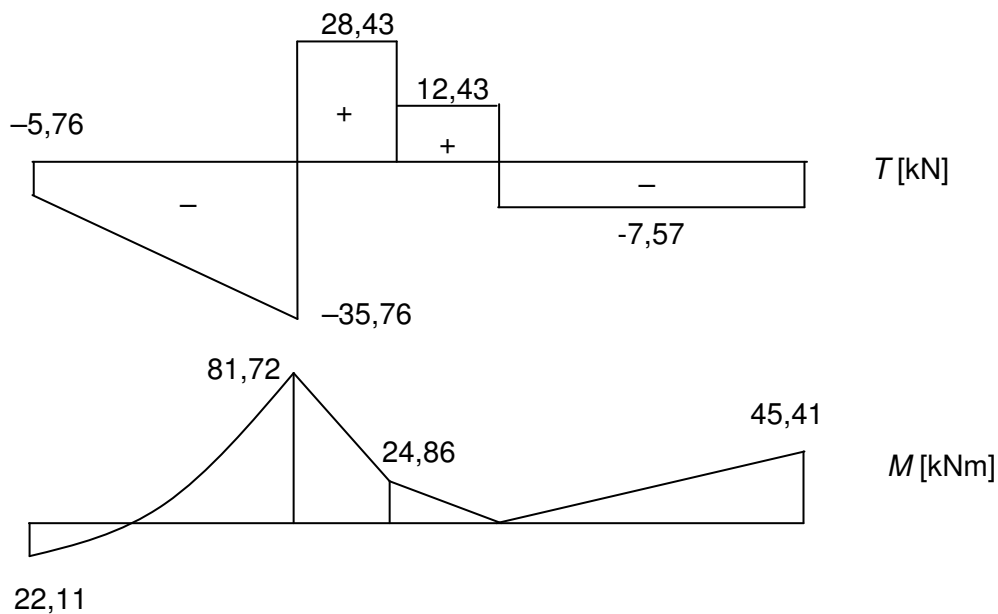
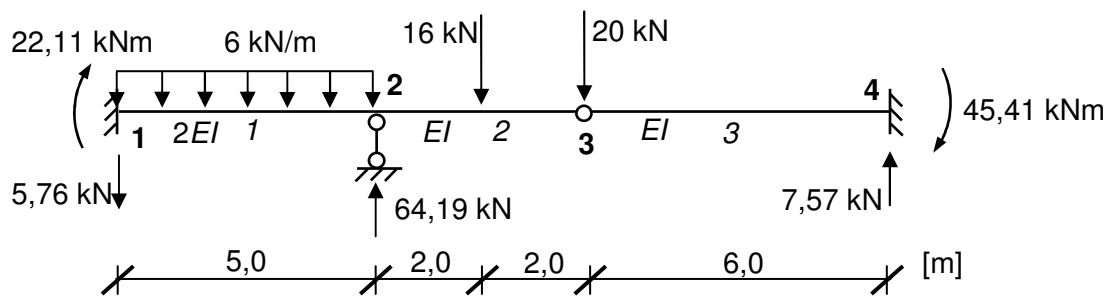
Na podstawie tych wektorów określamy wartości sił węzłowych na końcach prętów

$$1 \quad \begin{bmatrix} T_{12} \\ M_{12} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,76 \\ 22,11 \\ -35,76 \\ 81,72 \end{bmatrix}$$

$$2 \quad \begin{bmatrix} T_{23} \\ M_{23} \\ T_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28,43 \\ -81,72 \\ 12,43 \end{bmatrix}$$

$$3 \quad \begin{bmatrix} T_{34} \\ T_{43} \\ M_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,57 \\ -7,57 \\ 45,41 \end{bmatrix}$$

Teraz można obliczyć reakcje podporowe oraz naszkicować wykresy momentów i sił poprzecznych w belce (z uwzględnieniem typów obciążeń przeszłowych na prętach **12** i **23**)



Wykonanie globalnej kontroli statycznej (suma rzutów sił na kierunku pionowy i suma momentów względem dowolnego punktu na płaszczyźnie) oraz kontroli kinematycznej pozostawia się czytelnikowi.