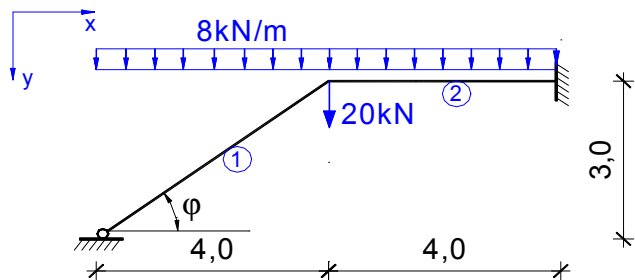


**Zad. Wyznaczyć rozkład sił wewnętrznych  $N, T, M$ , korzystając z komputerowej wersji metody przemieszczeń.**

– schemat konstrukcji:

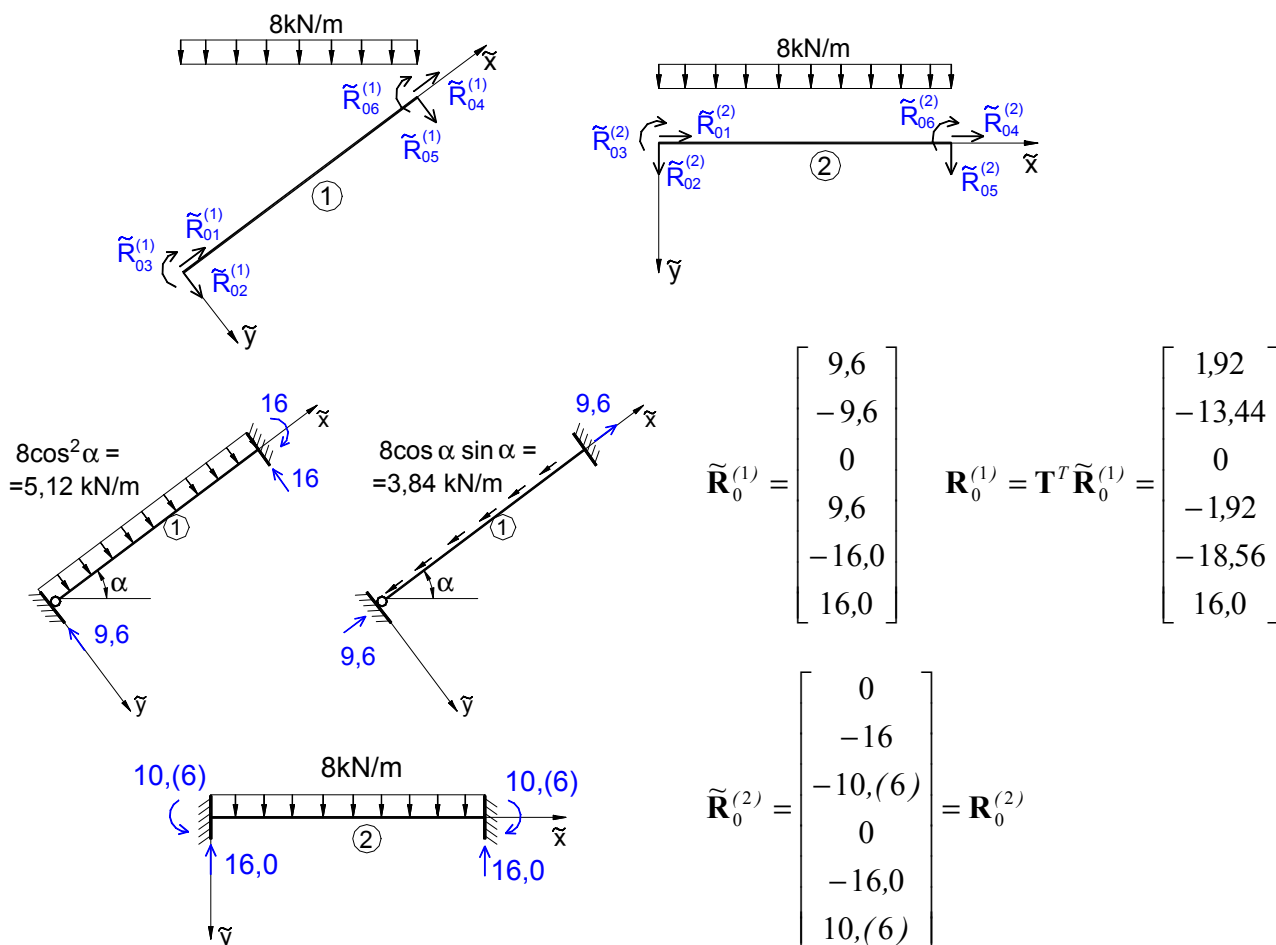


$E=205\text{GPa};$   
**I 220:**  $I=3060\text{ cm}^4$   
 $A=39,6\text{ cm}^2$   
 $EI_1=6273\text{ kNm}^2$   
 $EA_1=811800\text{ kN}$   
**I 240:**  $I=4250\text{ cm}^4$   
 $A=46,1\text{ cm}^2$   
 $EI_2=8712,5\text{ kNm}^2$   
 $EA_2=945050\text{ kN}$   
 $\varphi = 36,87^\circ$

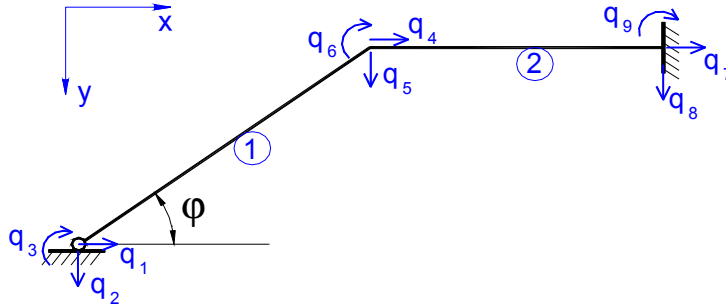
– macierz transformacji (pręt nr1):  $\alpha = -\varphi = -36,87^\circ$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– wektory  $\tilde{\mathbf{R}}_0^{(e)}$  (dla pręta 1 przeprowadzono redukcję statyczną – przegub na lewym końcu)



- przemieszczenia w układzie globalnym:



- tabela powiązań:

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	1	2	3	4	5	6
<b>2</b>	4	5	6	7	8	9

- wektor sił węzłowych w układzie globalnym (po agregacji):

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_w - \mathbf{R}_0^{(e)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1,92 \\ -13,44 \\ 0 \\ -1,92 + 0 \\ -18,56 - 16 \\ 16 - 10, (6) \\ 0 \\ -16 \\ 10, (6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,92 \\ 13,44 \\ 0 \\ 1,92 \\ 54,56 \\ -5, (3) \\ 0 \\ 16 \\ -10, (6) \end{bmatrix}$$

- macierze sztywności prętów w układach lokalnych (przeprowadzono redukcję statyczną dla pręta z przegubem  $\leftarrow \tilde{P}_3^{(1)} = 0$ ) – wyniki z programu TRANS:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 162400,0 & 0 & 0 & -162400,0 & 0 & 0 \\ 0 & 150,6 & 0 & 0 & -150,6 & 752,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -162400,0 & 0 & 0 & 162400,0 & 0 & 0 \\ 0 & -150,6 & 0 & 0 & 150,6 & -752,8 \\ 0 & 752,8 & 0 & 0 & -752,8 & 3764,0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 236300,0 & 0 & 0 & -236300,0 & 0 & 0 \\ 0 & 1634 & 3267,0 & 0 & -1634,0 & 3267,0 \\ 0 & 3267 & 8713,0 & 0 & -3267,0 & 4356,0 \\ -236300,0 & 0 & 0 & 236300,0 & 0 & 0 \\ 0 & -1634,0 & -3267,0 & 0 & 1634,0 & -3267,0 \\ 0 & 3267,0 & 4356,0 & 0 & -3267,0 & 8713,0 \end{bmatrix}$$

- macierze sztywności prętów w układzie globalnym:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 104000,0 & -77860,0 & 0 & -104000,0 & 77860,0 & 451,7 \\ -77860,0 & 58550,0 & 0 & 77860,0 & -58550,0 & 602,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -104000,0 & 77860,0 & 0 & 104000,0 & -77860,0 & -451,7 \\ 77860,0 & -58550,0 & 0 & -77860,0 & 58550,0 & -602,2 \\ 451,7 & 602,2 & 0 & -451,7 & -602,2 & 3764,0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \tilde{\mathbf{K}}^{(2)}$$

- macierz sztywności układu (po agregacji):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 104000 & -77860 & 0 & -104000 & 77860 & 451,7 & 0 & 0 & 0 \\ -77860 & 58550 & 0 & 77860 & -58550 & 602,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -104000 & 77860 & 0 & 104000 + 236300 & -77860 & -451,7 & -236300 & 0 & 0 \\ 77860 & -58550 & 0 & -77860 & 58550 + 1634 & -602,2 + 3267 & 0 & -1634 & 3267 \\ 451,7 & 602,2 & 0 & -451,7 & -602,2 + 3267 & 3764 + 8713 & 0 & -3267 & 4356 \\ 0 & 0 & 0 & -236300 & 0 & 0 & 236300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1634 & -3267 & 0 & 1634 & -3267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3267 & 4356 & 0 & -3267 & 8713 \end{bmatrix}$$

- po uwzględnieniu warunków podparcia ( $q_1 = q_2 = q_7 = q_8 = q_9 = 0$ ;  $\tilde{P}_3^{(1)} = 0 \rightarrow$  redukujemy 1,2,7,8,9 oraz 3 wiersz i kolumnę macierzy  $\mathbf{K}$  oraz odpowiednie wyrazy wektora  $\mathbf{P}$ ):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 340300 & -77860 & -451,7 \\ -77860 & 60184 & 2664,8 \\ -451,7 & 2664,8 & 12477 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1,92 \\ 54,56 \\ -5,(3) \end{bmatrix}$$

- po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy wektor przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{q}$ , w którym występuje nieznaną kąta obrotu  $q_3$ , niepotrzebny do obliczenia końcowych sił; jest to wynikiem wykonania redukcji statycznej na pręcie 1:

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ 0,3114 \\ 1,3406 \\ -0,7025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

**Obliczenie sił węzłowych dla poszczególnych prętów:**

- wektory przemieszczeń elementów w układzie globalnym:

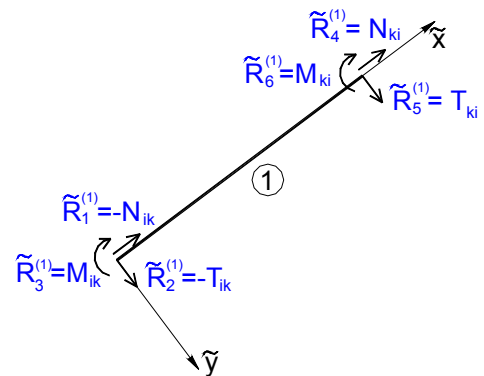
$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ 0,3114 \\ 1,3406 \\ -0,7025 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,3114 \\ 1,3406 \\ -0,7025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

- transformacja do układów lokalnych:  $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = \mathbf{T}\mathbf{q}^{(e)}$

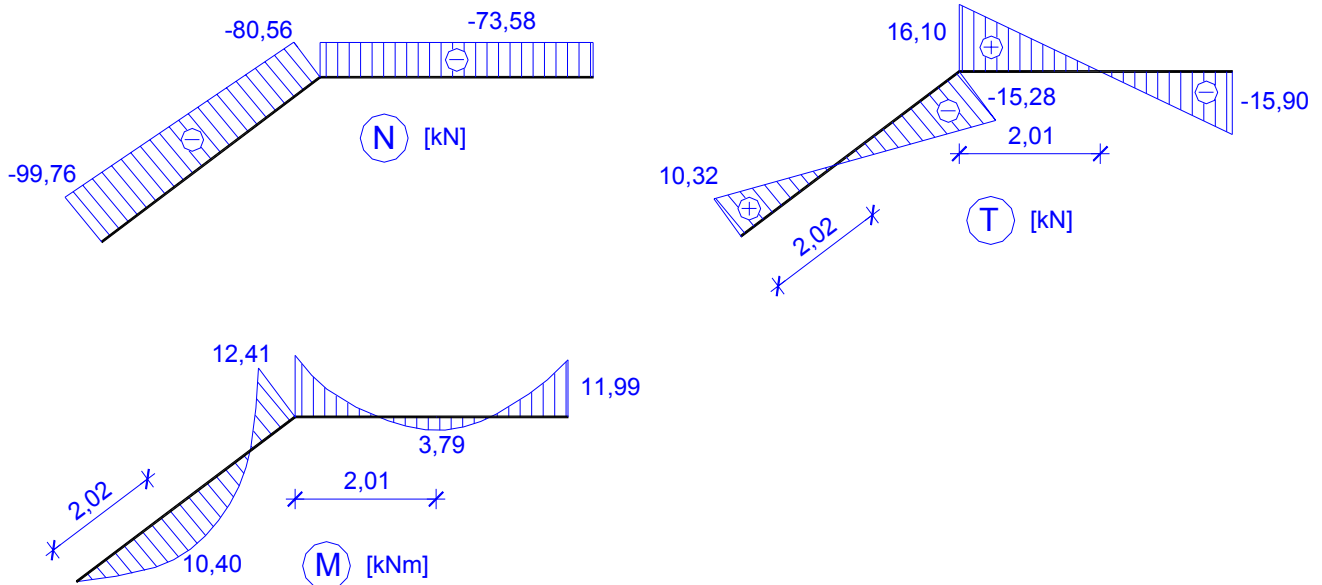
$$\tilde{\mathbf{q}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_3 \\ -0,5552 \\ 1,2593 \\ -0,7025 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \quad \tilde{\mathbf{q}}^{(2)} = \mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,3114 \\ 1,3406 \\ -0,7025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

- wektory reakcji węzłowych:  $\tilde{\mathbf{R}}^{(e)} = \tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{R}}_0^{(e)}$

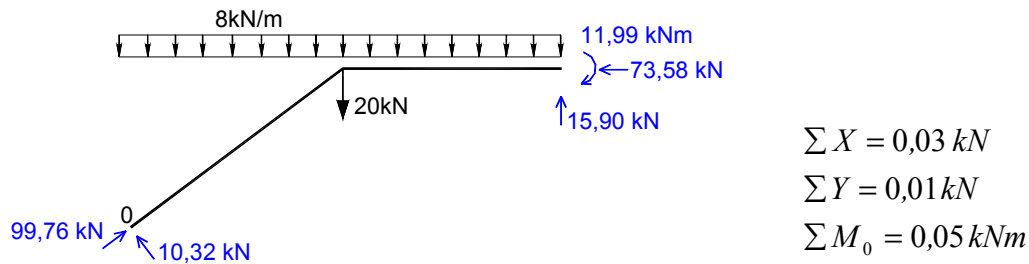
$$\tilde{\mathbf{R}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 99,76 \\ -10,32 \\ 0 \\ -80,56 \\ -15,28 \\ 12,41 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{R}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 73,58 \\ -16,10 \\ -12,41 \\ -73,58 \\ -15,90 \\ 11,99 \end{bmatrix}$$



- wykresy sił wewnętrznych:



– kontrola statyczna:



**Wersja rozwiązania bez redukcji statycznej dla pręta nr 1:**

– wektor  $\tilde{\mathbf{R}}_0^{(1)}$ :

$$\tilde{\mathbf{R}}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 9,6 \\ -12,8 \\ -10,67 \\ 9,6 \\ -12,8 \\ 10,67 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_0^{(1)} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{R}}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ -16,0 \\ -10,67 \\ 0,0 \\ -16,0 \\ 10,67 \end{bmatrix}$$

– wektor sił węzłowych w układzie globalnym (po agregacji):

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_w - \mathbf{R}_0^{(e)} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0 \\ -16,0 \\ -10,67 \\ 0+0 \\ -16-16 \\ 10,67-10,67 \\ 0 \\ -16 \\ 10,(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 16,0 \\ 10,67 \\ 0,0 \\ 52,0 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 16 \\ -10,(6) \end{bmatrix}$$

– macierz sztywności w układzie lokalnym – wyniki z programu TRANS:

$$\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 162400,0 & 0 & 0 & -162400,0 & 0 & 0 \\ 0 & 602,2 & 1506 & 0 & -602,2 & 1506 \\ 0 & 1506 & 5018 & 0 & -1506 & 2509 \\ -162400,0 & 0 & 0 & 162400,0 & 0 & 0 \\ 0 & -602,2 & -1506 & 0 & 602,2 & -1506 \\ 0 & 1506 & 2509 & 0 & -1506 & 5018 \end{bmatrix}$$

- macierz sztywności w układzie globalnym:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 104100,0 & -77640,0 & 903,3 & -104100,0 & 77640,0 & 903,3 \\ -77640,0 & 58840,0 & 1204,0 & 77640,0 & -58840,0 & 1204,0 \\ 903,3 & 1204,0 & 5018,0 & -903,3 & -1204,0 & 2509,0 \\ -104100,0 & 77640,0 & -903,3 & 104100,0 & -77640,0 & -903,3 \\ 77640,0 & -58840,0 & -1204,0 & -77640,0 & 58840,0 & -1204,0 \\ 903,3 & 1204,0 & 2509,0 & -903,3 & -1204,0 & 5018,0 \end{bmatrix}$$

- macierz sztywności układu (po agregacji):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 104100 & -77640 & 903,3 & -104100 & 77640 & 903,3 & 0 & 0 & 0 \\ -77640 & 58840 & 1204 & 77640 & -58840 & 1204 & 0 & 0 & 0 \\ 903,3 & 1204 & 5018 & -903,3 & -1204 & 2509 & 0 & 0 & 0 \\ -104100 & 77640 & -903,3 & 104100+236300 & -77640 & -903,3 & -236300 & 0 & 0 \\ 77640 & -58840 & -1204 & -77640 & 58840+1634 & -1204+3267 & 0 & -1634 & 3267 \\ 903,3 & 1204 & 2509 & -903,3 & -1204+3267 & 5018+8713 & 0 & -3267 & 4356 \\ 0 & 0 & 0 & -236300 & 0 & 0 & 236300 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1634 & -3267 & 0 & 1634 & -3267 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3267 & 4356 & 0 & -3267 & 8713 \end{bmatrix}$$

- po uwzględnieniu warunków podparcia ( $q_1 = q_2 = q_7 = q_8 = q_9 = 0$ ; redukujemy 1,2,7,8 i 9 wiersz i kolumnę macierzy  $\mathbf{K}$  oraz odpowiednie wyrazy wektora  $\mathbf{P}$ , kąt obrotu  $q_3$  pozostaje jako niewiadoma!!!):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5018 & -903,3 & -1204 & 2509 \\ -903,3 & 340400 & -77640 & -903,3 \\ -1204 & -77640 & 60474 & 2063 \\ 2509 & -903,3 & 2063 & 13731 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10,67 \\ 0 \\ 52 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy wektor przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{q}$ , łącznie z kątem obrotu  $q_3$ :

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,8554 \\ 0,3114 \\ 1,3406 \\ -0,7025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Obliczone przemieszczenia  $q_4$ ,  $q_5$  i  $q_6$  pokrywają się z wartościami obliczonymi z wykorzystaniem redukcji statycznej.

– wektor przemieszczeń elementu:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,8554 \\ 0,3114 \\ 1,3406 \\ -0,7025 \end{bmatrix} \times 10^{-3};$$

– transformacja do układu lokalnego:  $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = \mathbf{T}\mathbf{q}^{(e)}$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,8554 \\ -0,5552 \\ 1,2593 \\ -0,7025 \end{bmatrix} \times 10^{-3};$$

– siły węzłowe:  $\tilde{\mathbf{R}}^{(e)} = \tilde{\mathbf{K}}^{(e)}\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} + \tilde{\mathbf{R}}_0^{(e)}$  (macierz sztywności i wektor reakcji – bez redukcji!!!)

$$\tilde{\mathbf{R}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 99,76 \\ -10,32 \\ 0 \\ -80,56 \\ -15,28 \\ 12,41 \end{bmatrix};$$

Końcowe siły pokrywają się z wartościami obliczonymi z wykorzystaniem redukcji statycznej