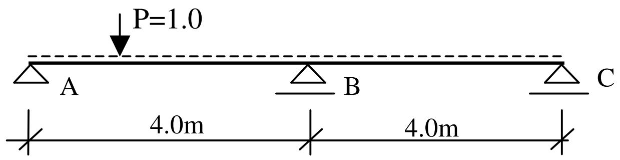
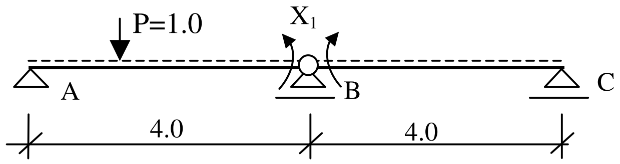
Zad. Wyznaczyć linie wpływu reakcji R_B dla belki (EI=const):



Rozwiązanie - wersja I:

Układ podstawowy:



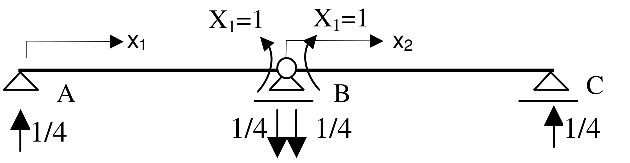
SSN=1

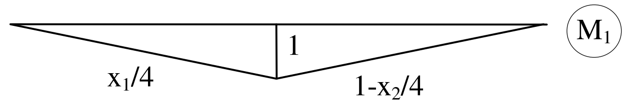
URK:

$$\delta_{11} LwX_1 + \delta_{1P}(x) = 0$$

$$\boxed{LwR_B = LwR_B^0 + R_B^{(X_1=1)} \cdot LwX_1 + R_B^{(X_2=1)} \cdot LwX_2}$$

Stan $X_1=1$





$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2\right) = \frac{8}{3EI}$$

$\delta_{1P}(x) = \delta_{P1}(x)$ linia ugięcia belki wywołana działaniem siły $X_1=1$; wyznaczamy korzystając z różniczkowego równania linii ugięcia $\left(\delta_{P1}(x) = y\right)$:

<A;B>

$$M(x) = \frac{x_1}{4}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x_1}{4}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{x_1^2}{8} + C$$

$$EIy = -\frac{x_1^3}{24} + Cx_1 + D$$

war.brzegowe:

1) $x_1 = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow D = 0$

2) $x_1 = 4 \rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{4^3}{24} + 4C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$

$$\delta_{P1}^{AB}(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{x_1^3}{24} + \frac{2x_1}{3}\right)$$

<B;C>

$$M(x) = 1 - \frac{x_2}{4}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_2}{4} - 1$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{x_2^2}{8} - x_2 + C$$

$$EIy = \frac{x_2^3}{24} - \frac{x_2^2}{2} + Cx_2 + D$$

war. brzgowe:

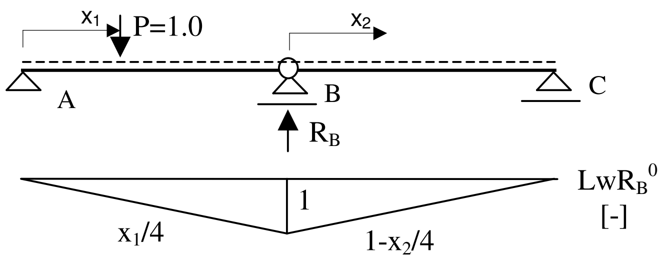
1) $x_2 = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow D = 0$

2) $x_2 = 4 \rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{4^3}{24} - \frac{4^2}{2} + 4C \Rightarrow C = \frac{4}{3}$

$$\delta_{P1}^{BC}(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{x_2^3}{24} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{4x_2}{3}\right)$$

$$LwX_1^{AB}=-\frac{\delta_{1P}^{AB}(x)}{\delta_{11}}=-\frac{3EI}{8}\cdot\frac{1}{EI}\left(-\frac{x_1^{3}}{24}+\frac{2x_1}{3}\right)=\frac{x_1^{3}}{64}-\frac{x_1}{4}$$

$$LwX_1^{BC}=-\frac{\delta_{1P}^{BC}(x)}{\delta_{11}}=-\frac{3EI}{8}\cdot\frac{1}{EI}\left(\frac{x_2^{3}}{24}-\frac{x_2^{2}}{2}+\frac{4x_2}{3}\right)=-\frac{x_2^{3}}{64}+\frac{3x_2^{2}}{16}-\frac{x_2}{2}$$

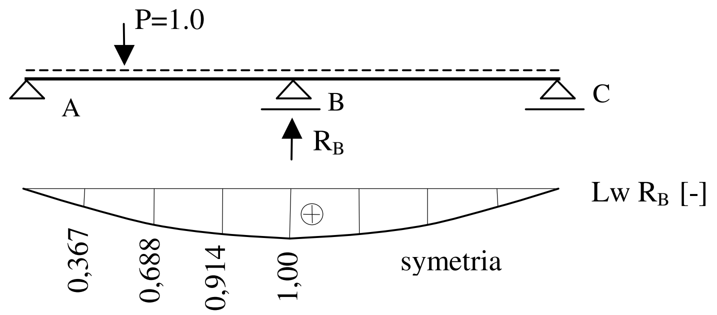


$\underline{<A;B>}$

$$LwR_B^{AB}=LwR_B^{0\,AB}+R_B^{(X_1=1)}\cdot LwX_1^{AB}=\frac{x_1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x_1^{3}}{64}-\frac{x_1}{4}\right)=-\frac{x_1^{3}}{128}+\frac{3x_1}{8}$$

$\underline{<B;C>}$

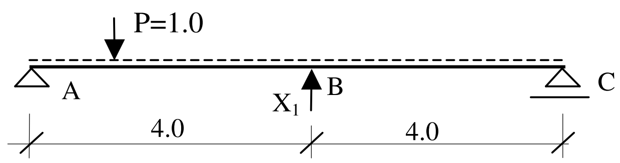
$$LwR_B^{BC}=LwR_B^{0\,BC}+R_B^{(X_1=1)}\cdot LwX_1^{BC}=1-\frac{x_2}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x_2^{3}}{64}+\frac{3x_2^{2}}{16}-\frac{x_2}{2}\right)=\frac{x_2^{3}}{128}-\frac{3x_2^{2}}{32}+1$$



- z uwagi na symetrię układu wystarczyłoby wyznaczyć linię wpływu R_B w przedziale <A;B>

<u>Rozwiązanie - wersja II:</u>

Układ podstawowy:



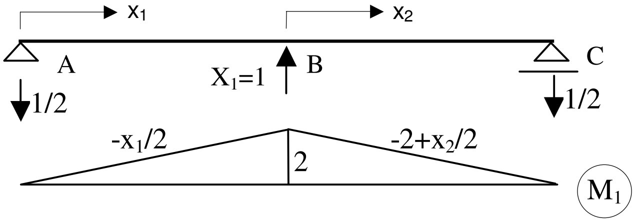
$$\boxed{LwR_B=LwX_1}$$

SSN=1

URK:

$$\delta_{11}LwX_1+\delta_{1P}(x)=0$$

Stan X_1=1



$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{2}{3}\cdot2\cdot2\right)=\frac{32}{3EI}$$

$$\delta_{1P}(x)=\delta_{P1}(x)$$

<A;B>

$$M(x)=-\frac{x_1}{2}$$
$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x_1}{2}$$
$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{x_1^{\,2}}{4}+C$$
$$EIy=\frac{x_1^{\,3}}{12}+Cx_1+D$$

war. brzegowe:

1) $x_1=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow D=0$

2) ze względu na symetrię obciążenia i geometrii układu* obrót przekroju w p.B wynosi 0:

$$x_1=4 \rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 0=\frac{4^2}{4}+C \Rightarrow C=-4$$

$$\delta_{P1}^{AB}(x)=\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1^{\,3}}{12}-4x_1\right)$$

<B;C>

$$M(x)=-2+\frac{x_2}{2}$$
$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=2-\frac{x_2}{2}$$
$$EI\frac{dy}{dx}=2x_2-\frac{x_2^{\,2}}{4}+C$$
$$EIy=x_2^2-\frac{x_2^{\,3}}{12}+Cx_2+D$$

war. brzegowe:

1) $x_2=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow C=0$

2) $x_2=4 \rightarrow y=0 \Rightarrow 0=4^2-\frac{4^3}{12}+D \Rightarrow D=-\frac{32}{3}$

$$\delta_{P1}^{BC}(x)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{x_2^{\,3}}{12}-x_2^2-\frac{32}{3}\right)$$

$$LwR_B^{AB}=LwX_1^{AB}=-\frac{\delta_{1P}^{AB}(x)}{\delta_{11}}=-\frac{3EI}{32}\cdot\frac{1}{EI}\left(\frac{x_1^{\,3}}{12}-4x_1\right)=-\frac{x_1^{\,3}}{128}+\frac{3x_1}{8}$$

$$LwR_B^{BC}=LwX_1^{BC}=-\frac{\delta_{1P}^{BC}(x)}{\delta_{11}}=-\frac{3EI}{32}\cdot\frac{1}{EI}\left(-\frac{x_2^{\,3}}{12}+x_2^2-\frac{32}{3}\right)=\frac{x_2^{\,3}}{128}-\frac{3x_2^2}{32}+1$$

(czyli j/w :)

*) w przypadku układu niesymetrycznego (różne przekroje lub rozpiętości):

<A;B>

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{x_1^{\,2}}{4}+C_1$$
$$EIy=\frac{x_1^{\,3}}{12}+C_1x_1+D_1$$

<B;C>

$$EI\frac{dy}{dx}=2x_2-\frac{x_2^{\,2}}{4}+C_2$$
$$EIy=x_2^2-\frac{x_2^{\,3}}{12}+C_2x_2+D_2$$

komplet warunków brzegowych:

1) $x_1=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow D_1=0$

2) $x_1=4\ (x_2=0) \rightarrow y_B^L=y_B^P \Rightarrow \frac{4^3}{12}+4C_1+D_1=0^2-\frac{0^{\,3}}{12}+C_2\cdot 0+D_2 \Rightarrow \frac{4^3}{12}+4C_1=D_2$

3) $x_1=4\ (x_2=0) \rightarrow \varphi_B^L=\varphi_B^P \Rightarrow \frac{4_1^{\,2}}{4}+C_1=2\cdot 0-\frac{0^{\,2}}{4}+C_2 \Rightarrow \frac{4_1^{\,2}}{4}+C_1=C_2$

4) $x_2=4 \rightarrow y=0 \Rightarrow 4^2-\frac{4^{\,3}}{12}+C_2\cdot 4+D_2=0$

- po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy: $C_1=-4;\ D_1=0;\ C_2=0;\ D_2=-32/3$, co prowadzi do tych samych wyników :)