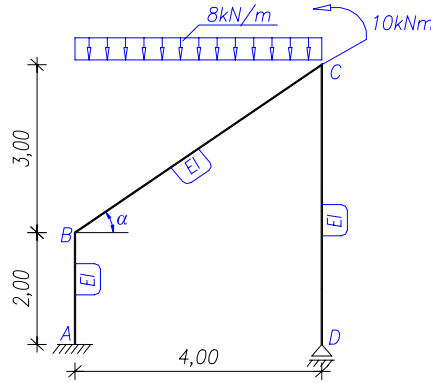


**Zad.1. Dla zadanej ramy statycznie niewyznaczalnej:**

- a) wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych korzystając z metody sił.
- b) obliczyć przemieszczenie poziome pktu D.
- c) obliczyć obrót pktu C.

**Zad.1a)**

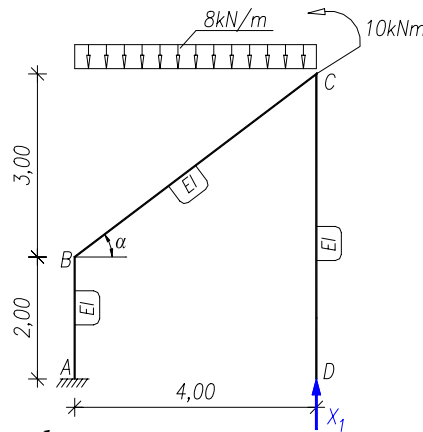
**1. Schemat konstrukcji:**



SSN=1;

EI=const  
E=205Gpa;

**2. Układ podstawowy:**



Układ spełnia warunki statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności.

**3. Układ równań kanonicznych:**

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0$$

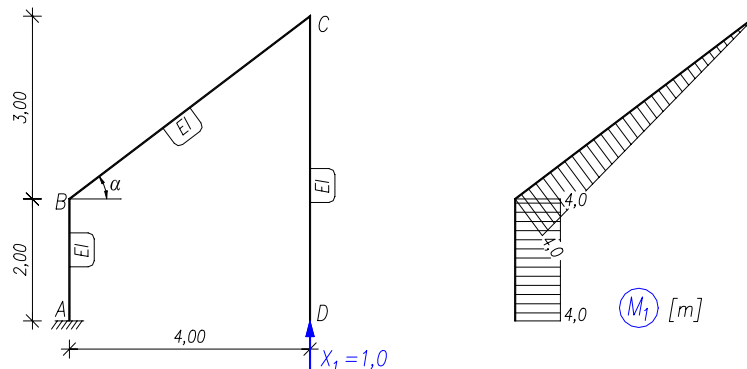
gdzie: współczynniki  $\delta_{ik}$ ,  $\delta_{iP}$ :

$$\delta_{ik} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI} dx; \quad \delta_{iP} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_P}{EI} dx;$$

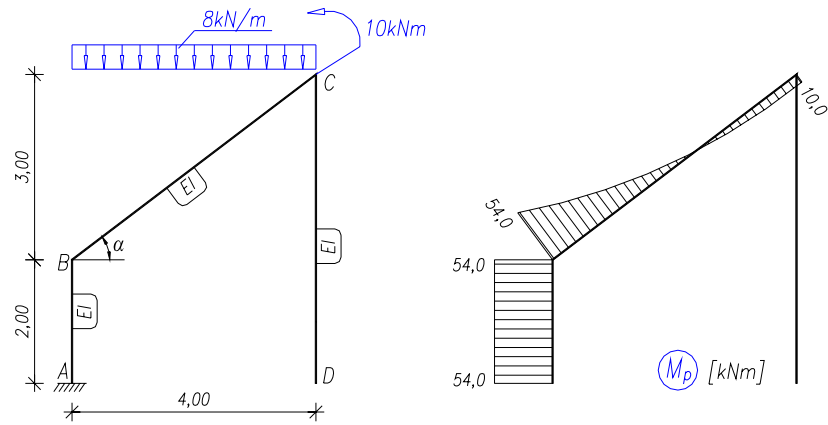
gdzie:  $M_i$  – momenty zginające od obciążenia siłą jednostkową  $X_i=1,0$  (w ukł. podst.)

$M_P$  – momenty zginające od obciążenia zewnętrznego (w ukł. podst.)

**3.1. Stan  $X_1 = 1$ :**



3.2. Stan „P”:



3.3. Obliczenie współczynników  $\delta_{ik}$ ,  $\delta_{iP}$

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx$$

$$EI \cdot \delta_{11} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 58,6 m^3$$

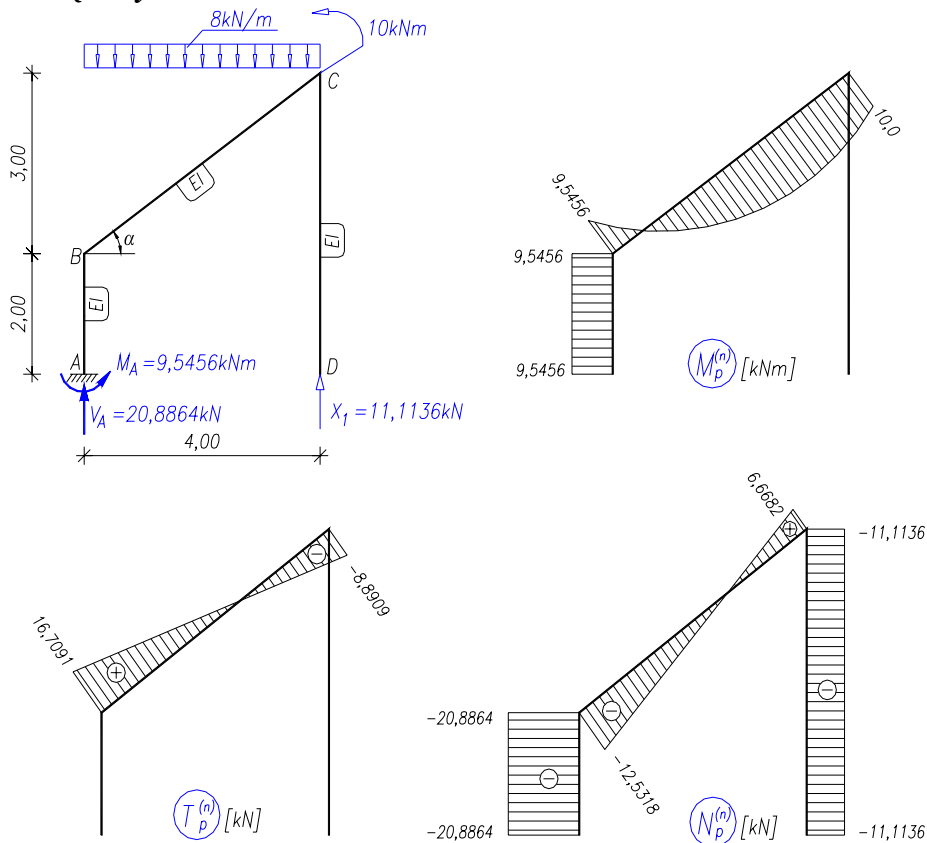
$$\delta_{1P} = \sum \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_P}{EI} dx$$

$$EI \cdot \delta_{1P} = -2 \cdot 4 \cdot 54 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 10 - \frac{2}{3} \cdot 54 \right) + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{8 \cdot 4^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -652 kNm^3$$

3.4. Rozwiązanie układu równań kanonicznych:

$$58,6/EI \cdot X_1 - 652/EI = 0 \Rightarrow X_1 = 11,1136 kN$$

4. Wykresy sił wewnętrznych w ramie:

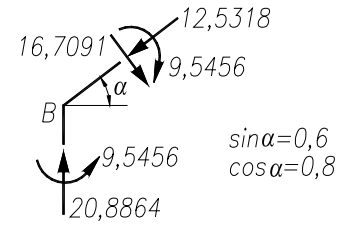


**5. Kontrola poprawności obliczeń.**

**5.1. Kontrola statyczna.**

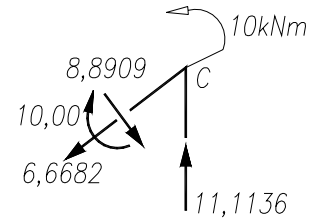
- spr. równowagi węzła B:

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & \quad -12,5318 \cos \alpha + 16,7091 \sin \alpha = 0 \\ & \quad \quad \quad 0 = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad -12,5318 \sin \alpha - 16,7091 \cos \alpha + 20,8864 = 0 \\ & \quad \quad \quad 0 = 0 \\ \sum M = 0 & \quad 9,5456 - 9,5456 = 0 \\ & \quad \quad \quad 0 = 0 \end{aligned}$$



- spr. równowagi węzła C:

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & \quad -6,6682 \cos \alpha + 8,8909 \sin \alpha = 0 \\ & \quad \quad \quad 0 = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad 11,1136 - 6,6682 \sin \alpha - 8,8909 \cos \alpha = 0 \\ & \quad \quad \quad 0 = 0 \\ \sum M = 0 & \quad 10 - 10 = 0 \\ & \quad \quad \quad 0 = 0 \end{aligned}$$



**5.2. Kontrola kinematyczna.**

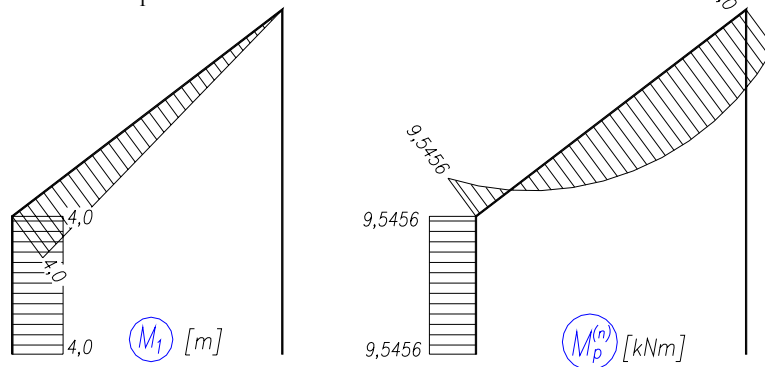
- przemieszczenie pionowe pktu D:

$$\bar{1} \cdot v_D = \sum \int_0^l \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^{(n)}}{EI} dx$$

- zgodnie z tw. redukcyjnym:

$$\bar{1} \cdot v_D = \sum \int_0^l \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^{(n)}}{EI} dx = \sum \int_0^l \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^0}{EI} dx$$

- ponieważ  $\bar{M}^0 = M_1$ :



$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot v_D &= \sum \int_0^l \frac{M_p^{(n)} M_1}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{EI} \left[ -2 \cdot 4 \cdot 9,5456 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 10 - \frac{2}{3} \cdot 9,5456 \right) + \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{8 \cdot 4^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \frac{-0,0021}{EI} < \frac{1}{EI} \cong 0 \end{aligned}$$

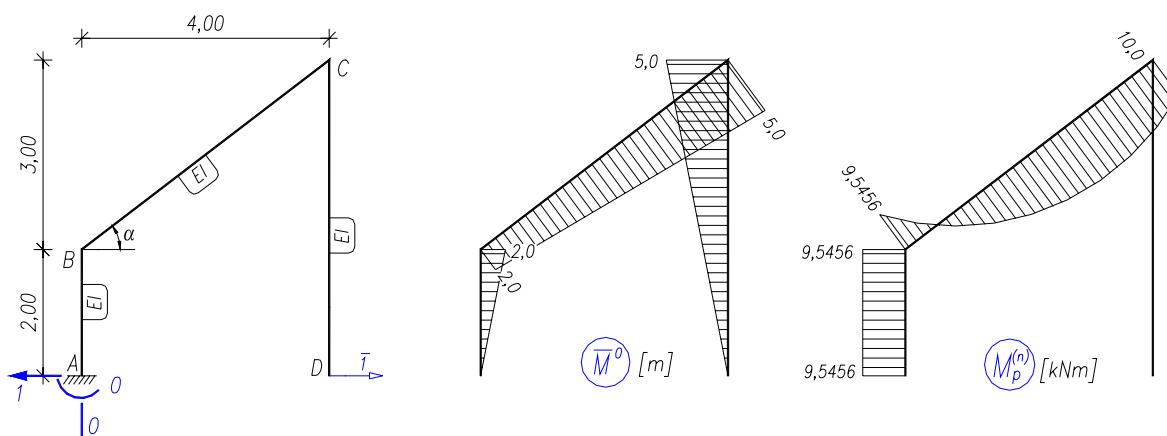
**Zad.1b)**

Przemieszczenie poziome punktu D (pomijamy wpływ sił tnących i normalnych):

$$\bar{1} \cdot \delta_D^h = \sum \int_0^l \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^{(n)}}{EI} dx$$

Skorzystamy z tw. redukcyjnego i wyznaczonego w Zad.1. wykresu momentów zginających:

$$\bar{1} \cdot \delta_D^h = \sum \int_0^l \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^{(n)}}{EI} dx = \sum \int_0^l \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^0}{EI} dx$$



$$\begin{aligned} \bar{1} \cdot \delta_D^h = \frac{1}{EI} & \left[ -2 \cdot 9,5456 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 10 - \frac{2}{3} \cdot 9,5456 \right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot 9,5456 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 4^2}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2+5) \right] = \frac{195,98}{EI} \left[ \frac{kNm^3}{EI} \right] \end{aligned}$$

Wymiarowanie przekroju:

$$w_x^{potrz} = \frac{|M_{ekstr}|}{\sigma_x} = \frac{1000}{21,5} = 46,51 \text{ cm}^3$$

Przyjęto I160:  $w_x = 117 \text{ cm}^3$ ;

$$I_x = 935 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 117 \text{ cm}^4$$

$$E = 205 \text{ GPa}$$

$$EI = 935 \cdot 10^{-8} \cdot 205 \cdot 10^6 = 1916,75 \text{ kNm}^2$$

$$\bar{1} \cdot \delta_D^h = \frac{195,98}{1916,75} = 0,102 \text{ m} = 10,2 \text{ cm}$$

**Przemieszczenie poziome punktu D (dla I160) wynosi:  $\delta_D^h = 10,2 \text{ cm}$**

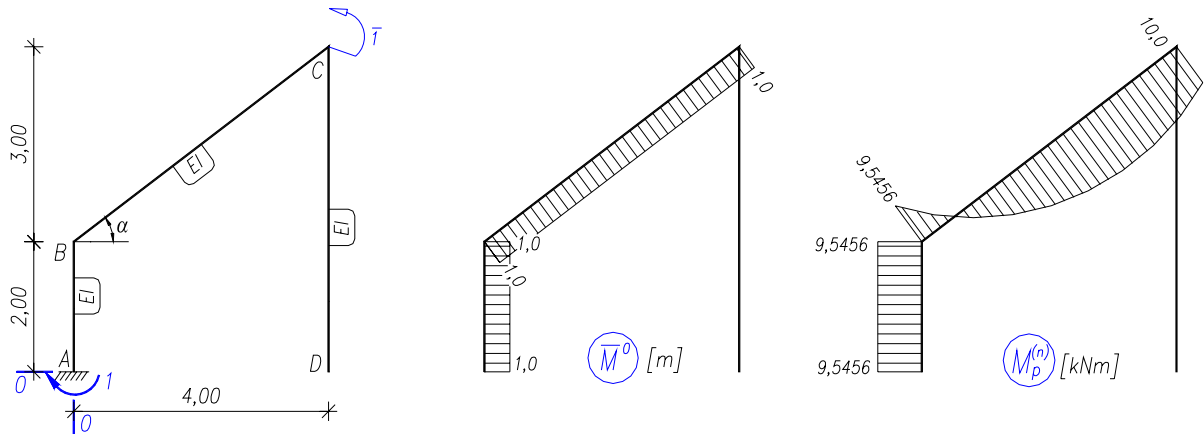
**Zad.1c)**

Kąt obrotu punktu C (pomijamy wpływ sił tnących i normalnych):

$$\bar{1} \cdot \varphi_C = \sum_0^l \int \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^{(n)}}{EI} dx$$

Skorzystamy z tw. redukcyjnego i wyznaczonego w Zad.1. wykresu momentów zginających:

$$\bar{1} \cdot \varphi_C = \sum_0^l \int \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^{(n)}}{EI} dx = \sum_0^l \int \frac{M_p^{(n)} \bar{M}^0}{EI} dx$$



$$\bar{1} \cdot \varphi_C = \frac{1}{EI} \left[ -2 \cdot 1 \cdot 9,5456 + 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} (10 - 9,5456) + \frac{2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 4^2}{8} \cdot 5 \cdot 1 \right] = \frac{35,378}{EI} \left[ \frac{kNm^2}{EI} \right]$$

Wymiarowanie przekroju:

$$w_x^{potrz} = \frac{|M_{ekstr}|}{\sigma_x} = \frac{1000}{21,5} = 46,51 \text{ cm}^3$$

Przyjęto I160:  $w_x = 117 \text{ cm}^3$ ;

$$I_x = 935 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 117 \text{ cm}^4$$

$$E = 205 \text{ GPa}$$

$$\bar{1} \cdot \varphi_C = \frac{35,378}{1916,75} = 0,0184 \text{ rad} = 1,06^\circ$$

**Kąt obrotu pktu C (dla I160) wynosi:  $\varphi_C = 0,0184 \text{ rad} = 1,06^\circ$**