

ZADANIE

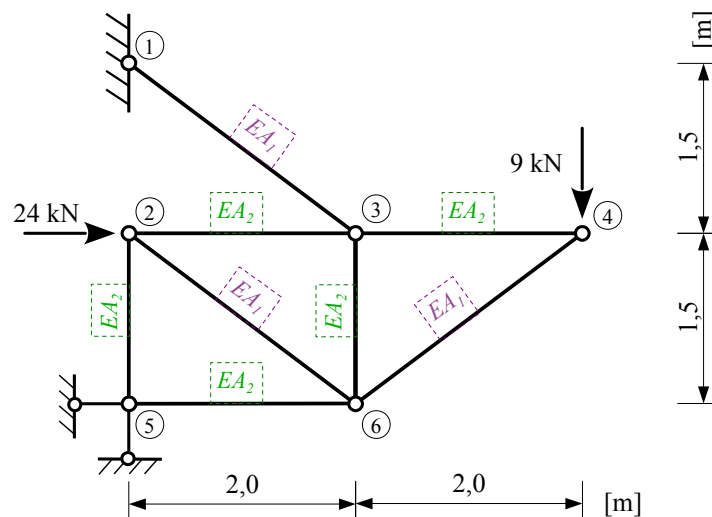
Kratownica przedstawiona na Rys.1. obciążona jest zadanymi siłami zewnętrznymi, a dodatkowo trzy pręty (1-3, 2-3 i 3-4) zostały równomiernie ogrzane o $t_0 = 30\text{ }^\circ\text{C}$. Kratownica wykonana jest z kątowników 25x25x4 (krzyżulce: 2-6, 4-6 oraz pręt 1-3) oraz 20x20x3 (pozostałe pręty).

Dane:

- kątownik 25x25x4: $A_1 = 1,85\text{ cm}^2$
- kątownik 20x20x3: $A_2 = 1,13\text{ cm}^2$
- stałe materiałowe: $E = 205\text{ GPa}$, $\alpha_t = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$.

Wyznaczyć:

- przemieszczenie wypadkowe węzła nr 4,
- kąt obrotu pręta 3-4,
- wzajemne przemieszczenie (przybliżenie lub oddalenie) węzłów nr 3 i 5.



Rys.1. Schemat zadania

ROZWIĄZANIE

Szukane przemieszczenia wyznaczmy wykorzystując równanie pracy wirtualnej. Dla płaskiego, statycznie wyznaczalnego układu prętowego, dowolne przemieszczenie punktu „k” wywołane siłami zewnętrznymi wyznaczamy zgodnie z poniższym wzorem:

$$\bar{1} \cdot \delta_k^P = \sum \int_x \frac{\bar{M} M}{EI} dx + \sum \int_x \frac{\bar{T} T}{GA} \cdot \kappa dx + \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx,$$

natomiast przemieszczenie wywołane wpływami termicznymi – ze wzoru:

$$\bar{1} \cdot \delta_k^T = \sum \int_x \frac{\bar{M} \alpha_t \Delta t}{h} dx + \sum \int_x \bar{N} \alpha_t t_0 dx,$$

gdzie: δ_k^P – szukane przemieszczenie punktu „k”,

M, T, N – siły wewnętrzne wywołane obciążeniem zewnętrznym,

$\bar{M}, \bar{T}, \bar{N}$, – siły wewnętrzne wywołane odpowiednim obciążeniem wirtualnym,

I, A, h – moment bezwładności, pole powierzchni oraz wysokość przekroju poprzecznego pręta,

E – moduł Younga materiału pręta,

G – moduł Kirchoffa materiału pręta,

κ – współczynnik ścinania, zależny od kształtu przekroju,

α_t – współczynnik rozszerzalności termicznej materiału pręta,

Δt – różnica między temperaturą włókien górnych i dolnych przekroju pręta,

t_0 – różnica między temperaturą rozważaną (aktualną) a temperaturą montażu w środku

ciężkości przekroju poprzecznego (temperatura równomiernego ogrzania przekroju pręta).

Ponieważ w kratownicach:

$$M = 0,$$

oraz:

$$T = 0,$$

wzory na δ_k^P i δ_k^T przyjmują dużo przyjemniejszą postać:

$$\bar{I} \cdot \delta_k^P = \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx,$$

oraz:

$$\bar{I} \cdot \delta_k^T = \sum \int_x \bar{N} \alpha_t t_0 dx.$$

Wielkości podcałkowe występujące w obydwu wzorach są stałe na długości poszczególnych prętów, można je więc wyłączyć przed znak całki. Całkowanie będzie się odbywać na odcinkach równych długościom prętów, a sumowanie – po wszystkich prętach kratownicy. Otrzymamy zatem:

$$\bar{I} \cdot \delta_k^P = \sum_i \frac{\bar{N}_i N_i}{EA_i} \int_0^{l_i} dx,$$

oraz:

$$\bar{I} \cdot \delta_k^T = \alpha_t \sum_i \bar{N}_i t_{0i} \int_0^{l_i} dx.$$

Ponieważ:

$$\int_0^{l_i} dx = l_i,$$

ostateczne wzory, z których będziemy korzystać, mają postać:

$$\delta_k^P = \sum_i \frac{\bar{N}_i N_i}{EA_i} l_i,$$

$$\delta_k^T = \alpha_t \sum_i \bar{N}_i t_{0i} l_i.$$

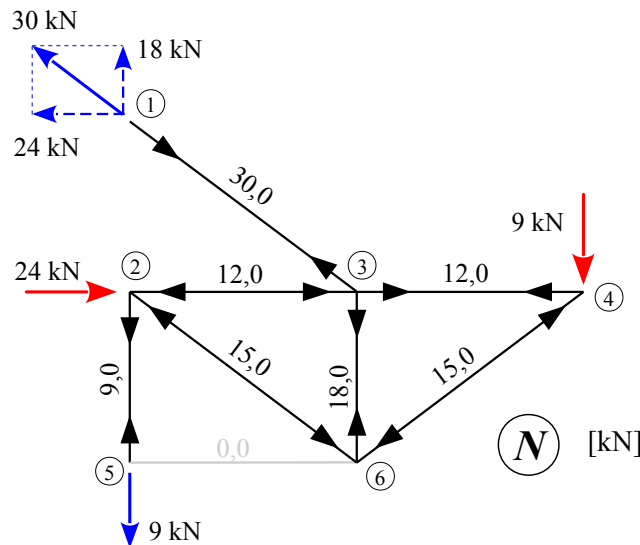
Zanim przystąpimy do obliczeń wyznaczmy jeszcze sztywności EA_i poszczególnych grup prętów, występujące we wzorze na δ_k^P :

$$EA_1 = 205 \cdot 10^6 \cdot 1,85 \cdot 10^{-4} = 37925 \text{ kN},$$

$$EA_2 = 205 \cdot 10^6 \cdot 1,13 \cdot 10^{-4} = 23165 \text{ kN}.$$

1. Przemieszczenia wywołane siłami zewnętrznymi

Siły normalne w prętach kratownicy wywołane obciążeniem zewnętrznym przedstawiono na Rys.2.



Rys.2. Siły w prętach kratownicy wywołane siłami zewnętrznymi

Obciążenie wirtualne przyjmujemy oczywiście odpowiednio do wyznaczanego przemieszczenia.

1.1. Przemieszczenie wypadkowe węzła nr 4

W tym przypadku nie znamy kierunku szukanego przemieszczenia (gdybyśmy znali, odpowiednim obciążeniem wirtualnym byłaby jednostkowa siła o takim właśnie kierunku przyłożona w węźle nr 4). Musimy zatem obliczyć składową pionową i poziomą przemieszczenia węzła, a przemieszczenie wypadkowe obliczymy, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa, z zależności:

$$\delta_4^P = \sqrt{(v_4^P)^2 + (h_4^P)^2}$$

gdzie: v_4^P – składowa pionowa przemieszczenia węzła nr 4,

h_4^P – składowa pozioma przemieszczenia węzła nr 4.

1.1.1. Składowa pionowa przemieszczenia węzła nr 4

Odpowiednie obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.3.

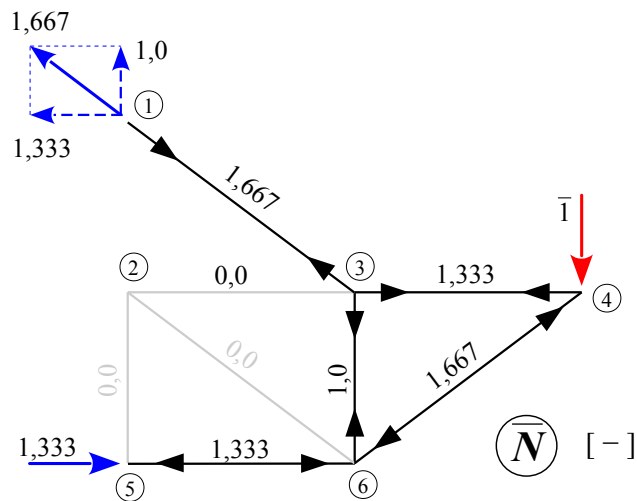
$$v_4^P = \sum_i \frac{\bar{N}_i N_i}{EA_i} l_i$$

$$v_4^P = \frac{1}{EA_1} \cdot [1,667 \cdot 30,0 \cdot 2,5 + (-1,667) \cdot (-15,0) \cdot 2,5] +$$

$$+ \frac{1}{EA_2} \cdot [1,333 \cdot 12,0 \cdot 2,0 + 1,0 \cdot 18,0 \cdot 1,5] =$$

$$= \frac{187,5}{EA_1} + \frac{58,99}{EA_2} = \frac{187,5}{37925} + \frac{58,99}{23165} = 0,004944 + 0,002547 = 0,007491 \text{ m}$$

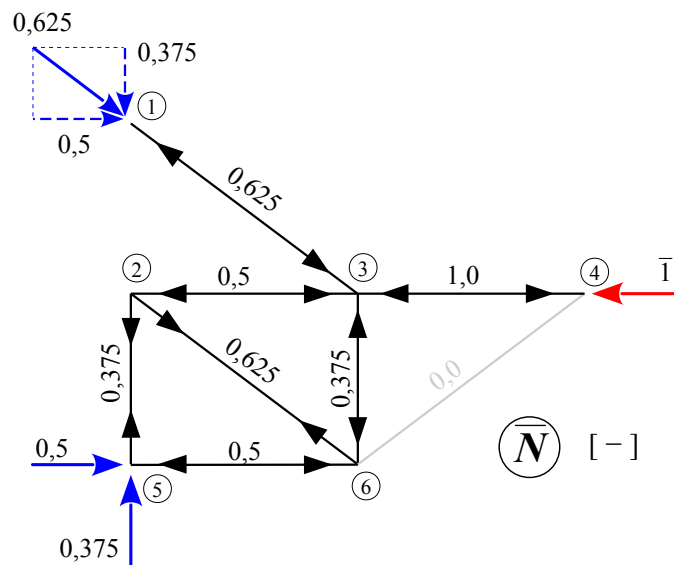
Węzeł nr 4 pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się pionowo w dół o 7,491 mm.



Rys.3. Siły normalne wywołane obciążeniem wirtualnym – składowa pionowa przemieszczenia węzła nr 4

1.1.2. Składowa pozioma przemieszczenia węzła nr 4

Odpowiednie obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.4.



Rys.4. Siły normalne wywołane obciążeniem wirtualnym – składowa pozioma przemieszczenia węzła nr 4

$$h_4^P = \sum_i \frac{\bar{N}_i N_i}{EA_i} l_i$$

$$h_4^P = \frac{1}{EA_1} \cdot [(-0,625) \cdot 30,0 \cdot 2,5 + 0,625 \cdot (-15,0) \cdot 2,5] +$$

$$+ \frac{1}{EA_2} \cdot [(-0,5) \cdot (-12,0) \cdot 2,0 + (-1,0) \cdot 12,0 \cdot 2,0 + (-0,375) \cdot 9,0 \cdot 1,5 + (-0,375) \cdot 18,0 \cdot 1,5] =$$

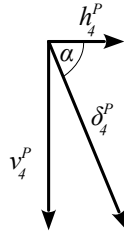
$$= -\frac{70,31}{EA_1} - \frac{27,19}{EA_2} = -\frac{70,31}{37925} - \frac{27,19}{23165} = -0,001854 - 0,001174 = -0,003028 \text{ m}$$

Węzeł nr 4 pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się poziomo w prawo o 3,028 mm.

1.1.3. Przemieszczenie wypadkowe węzła nr 4

$$\delta_4^P = \sqrt{(v_4^P)^2 + (h_4^P)^2}$$

$$\delta_4^P = \sqrt{(0,007491)^2 + (-0,003028)^2} = 0,008080 \text{ m}$$



Rys.5. Przemieszczenie wypadkowe węzła nr 4 – obciążenie siłami zewnętrznymi

Kierunek przemieszczenia:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_4^P}{h_4^P} = \frac{0,007491}{0,003028} = 2,474$$

$$\alpha = 67,99^\circ$$

Węzeł nr 4 pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się w dół po prostej nachylonej do poziomu pod kątem $67,99^\circ$.

1.2. Kąt obrotu pręta 3-4

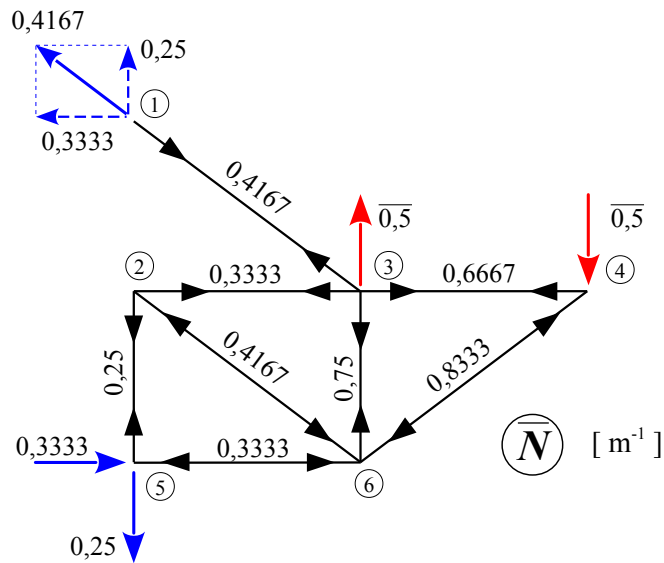
W tym przypadku odpowiednim obciążeniem wirtualnym będzie para sił przyłożonych do końców pręta 3-4, prostopadłych do jego osi, dających moment jednostkowy, a więc o wartościach:

$$\bar{P} = \frac{\bar{1}}{l_{34}} = \frac{\bar{1}}{2}$$

Obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.6.

$$\varphi_{34}^P = \sum_i \frac{\bar{N}_i N_i}{EA_i} l_i$$

$$\begin{aligned} \varphi_{34}^P &= \frac{1}{EA_1} \cdot [0,4167 \cdot 30,0 \cdot 2,5 + (-0,4167) \cdot (-15,0) \cdot 2,5 + (-0,8333) \cdot (-15,0) \cdot 2,5] + \\ &+ \frac{1}{EA_2} \cdot [0,3333 \cdot (-12,0) \cdot 2,0 + 0,6667 \cdot 12,0 \cdot 2,0 + 0,25 \cdot 9,0 \cdot 1,5 + 0,75 \cdot 18,0 \cdot 1,5] = \\ &= \frac{78,13}{EA_1} + \frac{31,63}{EA_2} = \frac{78,13}{37925} + \frac{31,63}{23165} = 0,002060 + 0,001365 = 0,003425 \text{ rad} = 0,20^\circ \end{aligned}$$

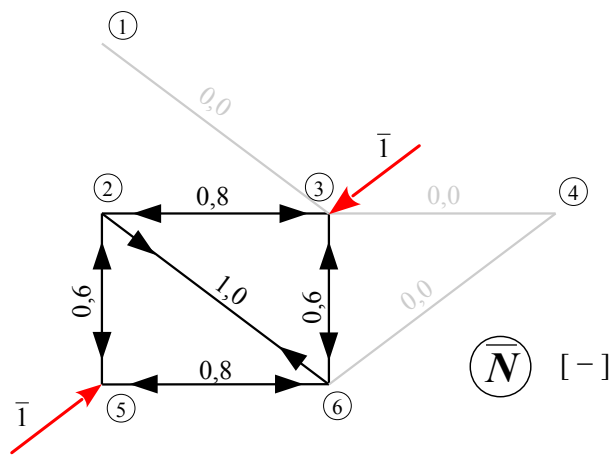


Rys.6. Siły normalne wywołane obciążeniem wirtualnym – obrót pręta 3-4

Pod wpływem zadanego obciążenia pręt 3-4 obróci się w prawo o 0,20 °.

1.3. Wzajemne przemieszczenie (zbliżenie lub oddalenie) węzłów nr 3 i 5

W tym przypadku odpowiednim obciążeniem wirtualnym będą dwie siły jednostkowe przyłożone do węzłów nr 3 i 5, o kierunku cięciwy 3-5 i przeciwnych zwrotach. Obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.7.



Rys.7. Siły normalne wywołane obciążeniem wirtualnym – wzajemne przemieszczenie węzłów nr 3 i 5

$$\delta_{35}^P = \sum_i \frac{\bar{N}_i N_i}{EA_i} l_i$$

$$\delta_{35}^P = \frac{1}{EA_1} \cdot [1,0 \cdot (-15,0) \cdot 2,5] + \frac{1}{EA_2} \cdot [(-0,8) \cdot (-12,0) \cdot 2,0 + (-0,6) \cdot 9,0 \cdot 1,5 + (-0,6) \cdot 18,0 \cdot 1,5] =$$

$$= -\frac{37,5}{EA_1} - \frac{5,1}{EA_2} = -\frac{37,5}{37925} - \frac{5,1}{23165} = -0,0009888 - 0,0002202 = -0,001209 \text{ m}$$

Pod wpływem zadanego obciążenia węzły oddalą się od siebie o 1,209 mm.

2. Wpływ temperatury

2.1. Przeszczenie wypadkowe węzła nr 4

2.1.1. Składowa pionowa przeszczenia węzła nr 4

Odpowiednie obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.3.

$$v_4^T = \alpha_t \sum_i \bar{N}_i t_{0i} l_i$$

$$v_4^T = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30,0 \cdot [1,667 \cdot 2,5 + 1,333 \cdot 2,0] = 0,002460 \text{ m}$$

Ogrzanie prętów 1-3, 2-3 i 3-4 o 30 °C spowoduje przeszczenie pionowe węzła nr 4 w dół o 2,460 mm.

2.1.2. Składowa pozioma przeszczenia węzła nr 4

Odpowiednie obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.4.

$$h_4^T = \alpha_t \sum_i \bar{N}_i t_{0i} l_i$$

$$h_4^T = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30,0 \cdot [(-0,625) \cdot 2,5 + (-0,5) \cdot 2,0 + (-1,0) \cdot 2,0] = -0,001643 \text{ m}$$

Ogrzanie prętów 1-3, 2-3 i 3-4 o 30 °C spowoduje przeszczenie poziome węzła nr 4 w prawo o 1,643 mm.

2.1.3. Przeszczenie wypadkowe węzła nr 4

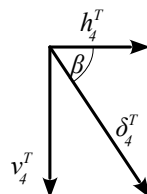
$$\delta_4^T = \sqrt{(v_4^T)^2 + (h_4^T)^2}$$

$$\delta_4^T = \sqrt{(0,002460)^2 + (-0,001643)^2} = 0,002958 \text{ m}$$

Kierunek przeszczenia:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_4^T}{h_4^T} = \frac{0,002460}{0,001643} = 1,497$$

$$\beta = 56,26^\circ$$



Rys.8. Przeszczenie wypadkowe węzła nr 4 – obciążenie termiczne

Węzeł nr 4 pod wpływem zadanego obciążenia termicznego przemieści się w dół po prostej nachylonej do poziomu pod kątem 56,26 °.

2.2. Kąt obrotu pręta 3-4

Odpowiednie obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.6.

$$\varphi_{34}^T = \alpha_t \sum_i \bar{N}_i t_{0i} l_i$$

$$\varphi_{34}^T = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30,0 \cdot [0,4167 \cdot 2,5 + 0,3333 \cdot 2,0 + 0,6667 \cdot 2,0] = 0,001095 \text{ rad} = 0,06^\circ$$

Ogrzanie prętów 1-3, 2-3 i 3-4 o 30 °C spowoduje obrót pręta 3-4 w prawo o 0,06 °.

2.3. Wzajemne przemieszczenie (zbliżenie lub oddalenie) węzła nr 3 i 5

Odpowiednie obciążenie wirtualne oraz wywołane nim siły normalne w prętach kratownicy przedstawione zostały na Rys.7.

$$\delta_{35}^T = \alpha_t \sum_i \bar{N}_i t_{0i} l_i$$

$$\delta_{35}^T = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30,0 \cdot [(-0,8) \cdot 2,0] = -0,0005760 \text{ m}$$

Węzły nr 3 i 5 pod wpływem zadanego obciążenia termicznego oddalą się od siebie o 0,576 mm.