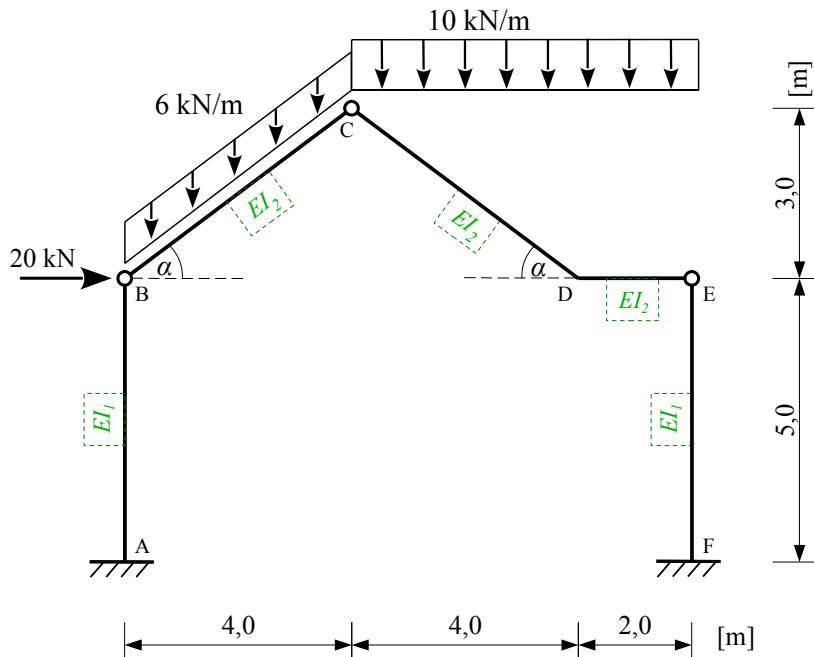


**ZADANIE**

Obliczyć przemieszczenie pionowe punktu C ramy, której schemat statyczny i obciążenie przedstawiono na Rys.1. Zastosować **metodę prac wirtualnych**, w obliczeniach **uwzględnić wpływ momentów zginających, sił poprzecznych i normalnych**. Przyjąć wstępnie przekroje prętów z profili dwuteowych (IN, IPE, HEB, HEA), tak aby pod działaniem zadanego obciążenia powstałe w prętach naprężenia normalne spełniały warunek  $\sigma \leq 200\text{MPa}$ .



Rys.1. Schemat zadania

**ROZWIĄZANIE****1. Wstęp**

Zanim zaczniemy stosowne obliczenia przyjrzyjmy się naszemu układowi. Przedstawiona na Rys.1 rama jest układem statycznie wyznaczalnym i geometrycznie niezmiennym, ponieważ spełniony jest warunek konieczny i dostateczny geometrycznej niezmienności oraz warunek statycznej wyznaczalności. Dla przypomnienia:

- 1) Warunek konieczny geometrycznej niezmienności:

$$n \geq 0,$$

gdzie:

$$n = w - 3 \cdot t,$$

przy czym:

$w$  – liczba więzów,

$t$  – liczba tarcz sztywnych w układzie.

W rozpatrywanym przykładzie: liczba tarcz:  $t = 4$ , liczba więzów:  $w = 12$ , zatem:

$$n = 12 - 3 \cdot 4 = 0,$$

warunek konieczny geometrycznej niezmienności jest spełniony, liczba więzów w układzie może zapewnić konstrukcji geometryczną niezmiennność (ale nie musi).

- 2) Warunek dostateczny geometrycznej niezmienności, czyli analiza rozmieszczenia więzów. Tarcze AB i EF są utwierdzone, a więc geometrycznie niezmiennie, tarcze BC i CE tworzą układ trójprzegubowy, oparty na geometrycznie niezmiennych tarczach AB i EF, z przegubami w punktach B, C i E, przeguby nie leżą na jednej prostej, co zapewnia temu układowi tarcz geometryczną niezmiennosc. Zatem rozmieszczenie więzów zapewnia analizowanej konstrukcji geometryczną niezmiennosc.
- 3) Określenie statycznej wyznaczalności: układ jest statycznie wyznaczalny, jeśli  $n = 0$  (czyli  $w = 3 \cdot t$ ), statycznie niewyznaczalny, jeśli  $n > 0$  (czyli  $w > 3 \cdot t$ ). U nas  $n = 0$ , zatem układ jest statycznie wyznaczalny.

Rama obciążona jest siłami zewnętrznymi, a więc **równanie pracy wirtualnej** ma postać:

$$\bar{I} \cdot \delta_k = \sum_x \int \frac{\bar{M} M}{EI} dx + \sum_x \int \frac{\bar{T} T}{GA} \cdot \kappa dx + \sum_x \int \frac{\bar{N} N}{EA} dx, \quad (1)$$

gdzie:  $\delta_k$  – szukane przemieszczenie punktu „k”, wywołane zadaniem obciążeniem,

$M, T, N$  – siły wewnętrzne wywołane zadaniem obciążeniem,

$\bar{M}, \bar{T}, \bar{N}$  – siły wewnętrzne wywołane odpowiednim obciążeniem wirtualnym,

$I, A$  – moment bezwładności oraz pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta,

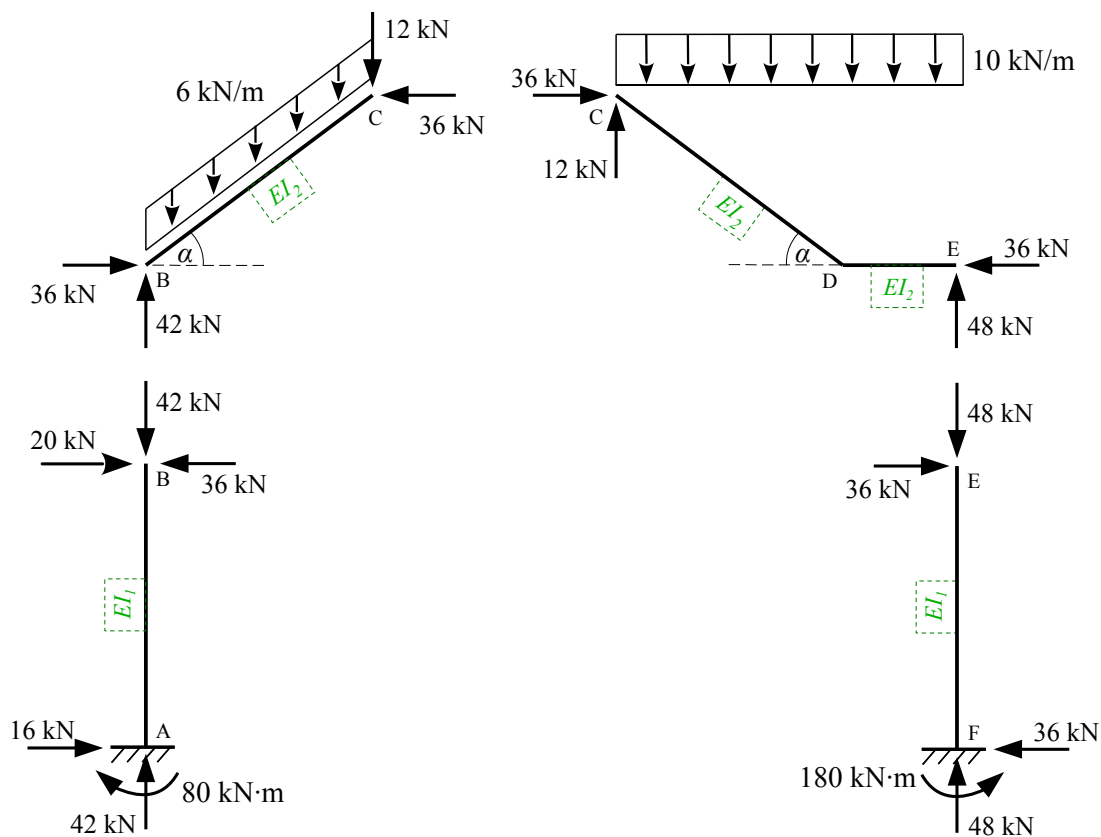
$E$  – moduł Younga materiału pręta,

$G$  – moduł Kirchhoffa materiału pręta,

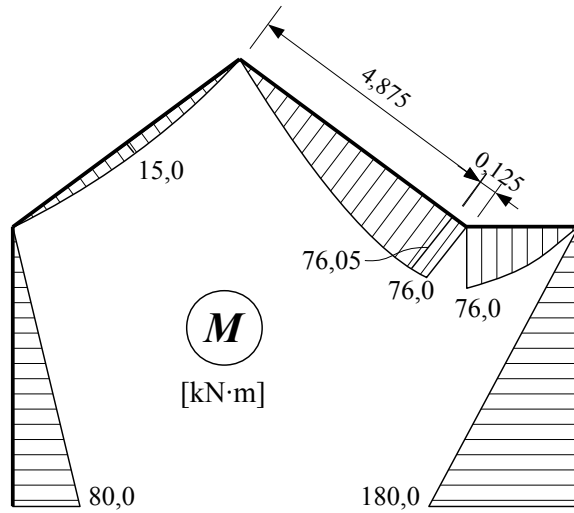
$\kappa$  – współczynnik ścinania, zależny od kształtu przekroju poprzecznego pręta.

Do obliczeń całek występujących w równaniu (1) zastosujemy metodę Mohra-Wereszczęgina.

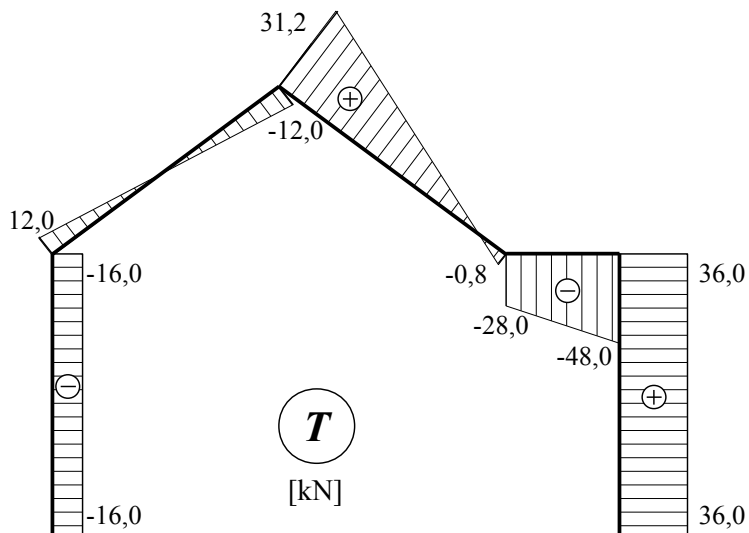
## 2. Reakcje więzów oraz wykresy sił wewnętrznych wywołane zadaniem obciążeniem



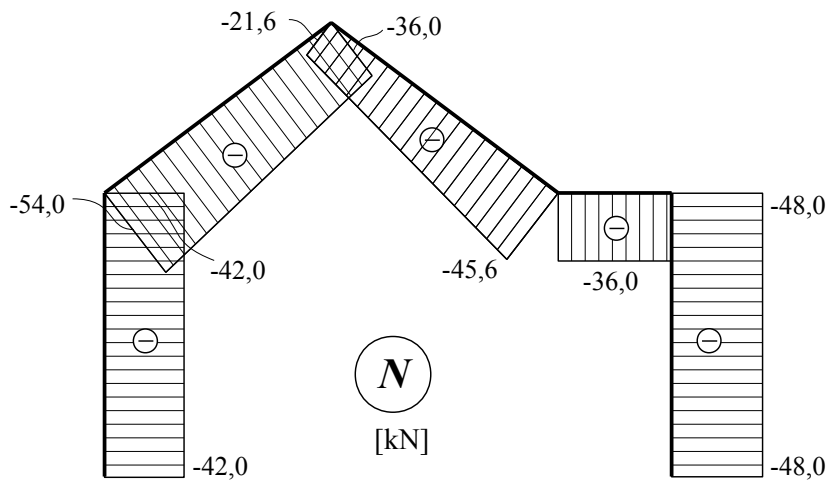
Rys.2. Reakcje więzów wywołane zadaniem obciążeniem



Rys.3. Wykres momentów zginających wywołanych zadaniem obciążeniem



Rys.4. Wykres sił poprzecznych wywołanych zadaniem obciążeniem



Rys.5. Wykres sił normalnych wywołanych zadaniem obciążeniem

### 3. Projektowanie przekrojów

Naprężenia normalne w prętach ramy:

$$\sigma = \frac{M}{w},$$

powinny spełniać warunek:

$$\sigma \leq \sigma_{\text{dop}},$$

przy czym:

$$\sigma_{\text{dop}} = 200 \text{ MPa} = 20,0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Potrzebny wskaźnik wytrzymałości przekroju:

$$w_{\text{potrz}} \geq \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{dop}}},$$

Maksymalny moment zginający dla pierwszej grupy prętów:

$$M_{\text{max}} = 180,0 \text{ kN} \cdot \text{m} = 18000,0 \text{ kN} \cdot \text{cm},$$

stąd:

$$w_{\text{potrz}} \geq \frac{18000,0}{20,0},$$

$$w_{\text{potrz}} \geq 900,0 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto I 240 HEB o wskaźniku wytrzymałości  $w = 938,0 \text{ cm}^3$ . Pozostałe dane przekroju:

$$g_1 = 10,0 \text{ mm},$$

$$t_1 = 17,0 \text{ mm},$$

$$h_1 = 240,0 \text{ mm},$$

$$I_1 = 11260,0 \text{ cm}^4,$$

$$A_1 = 106,0 \text{ cm}^2.$$

Maksymalny moment zginający dla drugiej grupy prętów:

$$M_{\text{max}} = 76,05 \text{ kN} \cdot \text{m} = 7605,0 \text{ kN} \cdot \text{cm},$$

stąd:

$$w_{\text{potrz}} \geq \frac{7605,0}{20,0},$$

$$w_{\text{potrz}} \geq 380,3 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto I 180 HEB o wskaźniku wytrzymałości  $w = 426 \text{ cm}^3$ . Pozostałe dane przekroju:

$$g_2 = 8,5 \text{ mm},$$

$$t_2 = 14,0 \text{ mm},$$

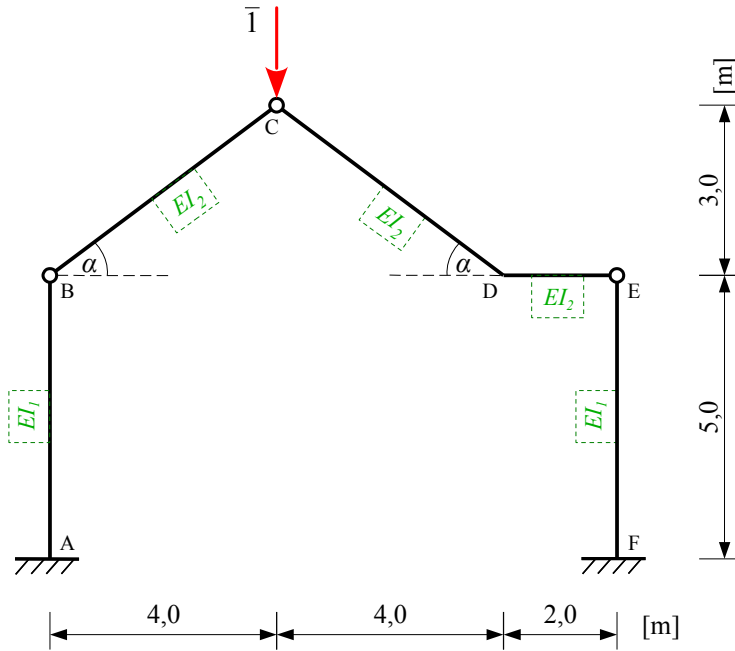
$$h_2 = 180,0 \text{ mm},$$

$$I_2 = 3830,0 \text{ cm}^4,$$

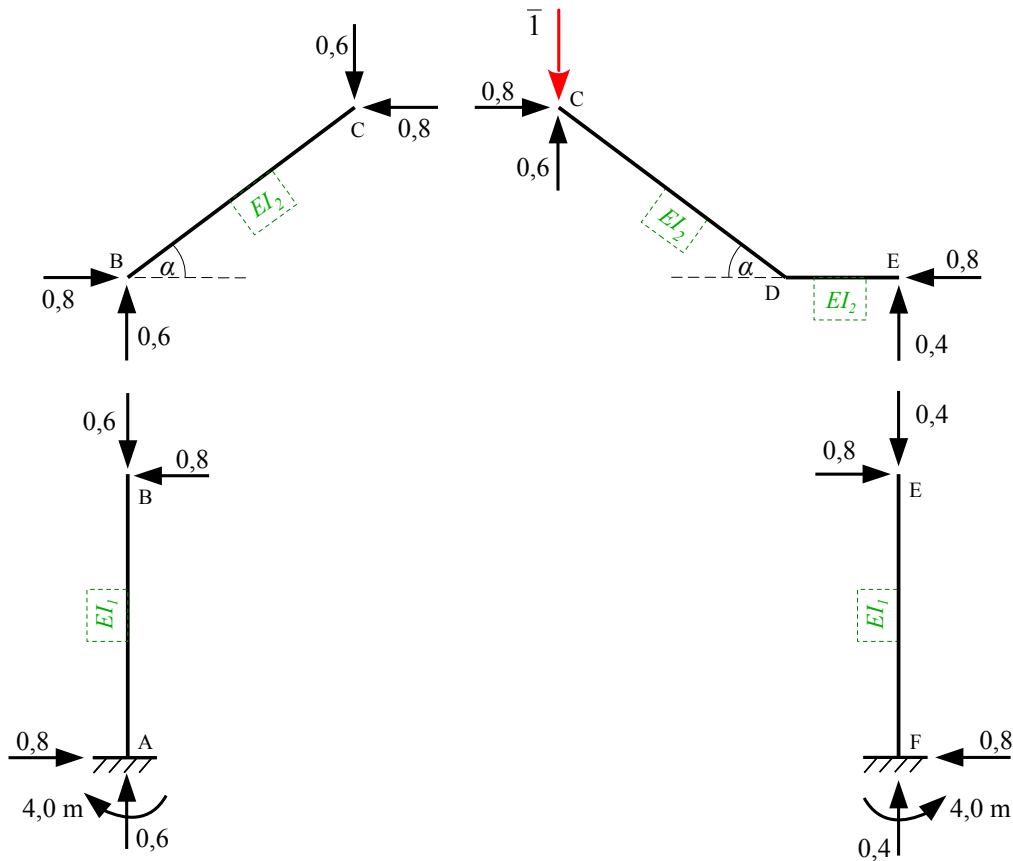
$$A_2 = 65,3 \text{ cm}^2.$$

### 4. Przemieszczenie pionowe punktu C

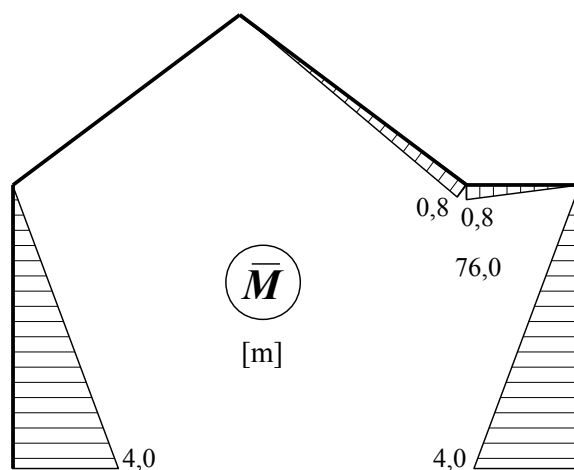
Odpowiednim obciążeniem wirtualnym w tym przypadku jest jednostkowa pionowa siła przyłożona w punkcie C (Rys.6.). Reakcje więzów wywołane tym obciążeniem przedstawione zostały na Rys.7,



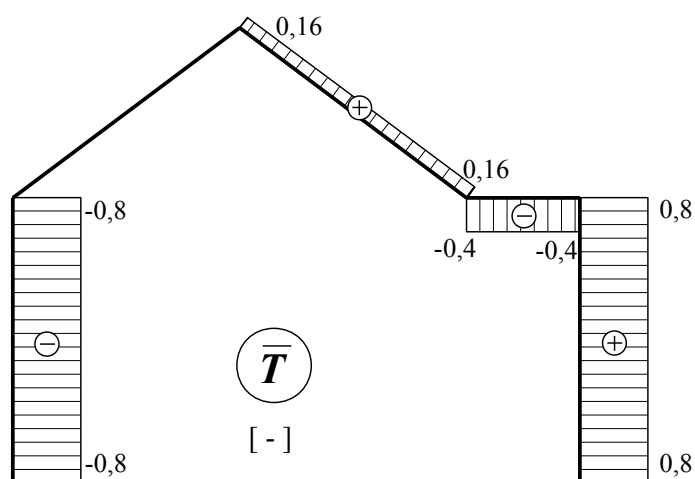
Rys.6. Obciążenie wirtualne



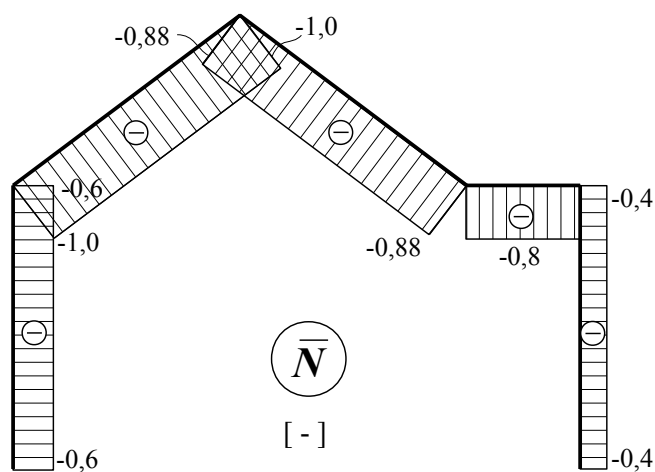
Rys.7. Reakcje więzów wywołane obciążeniem wirtualnym



Rys.8. Wykres momentów zginających wywołanych obciążeniem wirtualnym



Rys.9. Wykres sił poprzecznych wywołanych obciążeniem wirtualnym



Rys.10. Wykres sił normalnych wywołanych obciążeniem wirtualnym

Obliczmy występujące w równaniu (1) wyrażenia określające: sztywność zginania  $EI$ , sztywność osiową  $EA$ , sztywność ścinania  $GA$  oraz współczynnik  $\kappa$  dla poszczególnych grup prętów konstrukcji. Przyjmujemy moduł Younga  $E = 205$  GPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ , moduł Kirchhoffa:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{205}{2(1+0,3)} = 78,85 \text{ GPa.}$$

Wobec tego:

$$EI_1 = 205 \cdot 10^6 \cdot 11\,260 \cdot 10^{-8} = 23\,083 \text{ kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$EI_2 = 205 \cdot 10^6 \cdot 3\,830 \cdot 10^{-8} = 7\,851,5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2,$$

$$GA_1 = 78,85 \cdot 10^6 \cdot 106 \cdot 10^{-4} = 8\,358\,100 \text{ kN},$$

$$GA_2 = 78,85 \cdot 10^6 \cdot 65,3 \cdot 10^{-4} = 5\,148\,905 \text{ kN},$$

$$EA_1 = 205 \cdot 10^6 \cdot 106 \cdot 10^{-4} = 2\,173\,000 \text{ kN},$$

$$EA_2 = 205 \cdot 10^6 \cdot 65,3 \cdot 10^{-4} = 1\,338\,650 \text{ kN},$$

$$\kappa_1 = \frac{A_1}{A_{1sr}} = \frac{106}{(24 - 2 \cdot 1,7) \cdot 1} = 5,146$$

$$\kappa_2 = \frac{A_2}{A_{2sr}} = \frac{65,3}{(18 - 2 \cdot 1,4) \cdot 0,85} = 5,054$$

Pierwszy składnik prawej strony równania (1) (wpływ momentów zginających na przemieszczenie pionowe punktu C):

$$\begin{aligned} v_C^{(M)} &= \sum \int_x \frac{\bar{M} M}{EI} dx = \frac{1}{EI_1} \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 80 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 180 \right] + \\ &+ \frac{1}{EI_2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 76 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 4^2}{8} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,8 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 76 + \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,8 \right] = \\ &= \frac{666,7}{EI_1} + \frac{171,2}{EI_2} = \frac{666,7}{23\,083} + \frac{171,2}{7\,851,5} = 0,02888 + 0,02180 = 0,05068 \text{ m} \end{aligned}$$

Drugi składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił poprzecznych):

$$\begin{aligned} v_C^{(T)} &= \sum \int_x \frac{\bar{T} T}{GA} \cdot \kappa dx = \frac{\kappa_1}{GA_1} \cdot [5 \cdot (-0,8) \cdot (-16) + 5 \cdot 0,8 \cdot 36] + \\ &+ \frac{\kappa_2}{GA_2} \cdot [5 \cdot 0,16 \cdot \frac{1}{2} \cdot (31,2 - 0,8) + 2 \cdot (-0,4) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-28 - 48)] = \\ &= \frac{208}{GA_1} \cdot \kappa_1 + \frac{42,56}{GA_2} \cdot \kappa_2 = \frac{208}{8\,358\,100} \cdot 5,146 + \frac{42,56}{5\,148\,905} \cdot 5,054 = \\ &= 0,001281 + 0,0004178 = 0,001699 \text{ m} \end{aligned}$$

Trzeci składnik prawej strony równania (1) (wpływ sił normalnych):

$$v_C^{(N)} = \sum \int_x \frac{\bar{N} N}{EA} dx = \frac{1}{EA_1} \cdot [5 \cdot (-0,6) \cdot (-42) + 5 \cdot (-0,4) \cdot (-48)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{EA_2} \cdot [5 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-54 - 36) + 5 \cdot (-0,88) \cdot \frac{1}{2} \cdot (-21,6 - 45,6)] = \\
& = \frac{222}{EA_1} + \frac{372,8}{EA_2} = \frac{222}{2\,173\,000} + \frac{372,8}{1\,338\,650} = 0,0001022 + 0,0002785 = 0,0003807 \text{ m}
\end{aligned}$$

Przemieszczenie pionowe punktu C wynosi zatem:

$$v_C = v_C^{(M)} + v_C^{(T)} + v_C^{(N)} = 0,05068 + 0,001699 + 0,0003807 = 0,05276 \text{ m}.$$

Punkt C ramy pod wpływem zadanego obciążenia przemieści się **pionowo w dół o 5,276 cm**.

W praktyce przy obliczaniu przemieszczeń w układach zginanych pomija się wpływ sił poprzecznych i normalnych. Określmy jaki jest procentowy udział poszczególnych składników prawej strony równania (1) w rozpatrywanym przykładzie.

Wpływ momentów zginających:

$$\frac{|v_C^{(M)}|}{|v_C^{(M)}| + |v_C^{(T)}| + |v_C^{(N)}|} \cdot 100\% = \frac{0,05068}{0,05276} \cdot 100\% = 96,06\%.$$

Wpływ sił poprzecznych:

$$\frac{|v_C^{(T)}|}{|v_C^{(M)}| + |v_C^{(T)}| + |v_C^{(N)}|} \cdot 100\% = \frac{0,001699}{0,05276} \cdot 100\% = 3,22\%.$$

Wpływ sił normalnych:

$$\frac{|v_C^{(N)}|}{|v_C^{(M)}| + |v_C^{(T)}| + |v_C^{(N)}|} \cdot 100\% = \frac{0,0003807}{0,05276} \cdot 100\% = 0,72\%.$$

Jak widać, wpływ sił poprzecznych i normalnych jest pomijalnie mały.