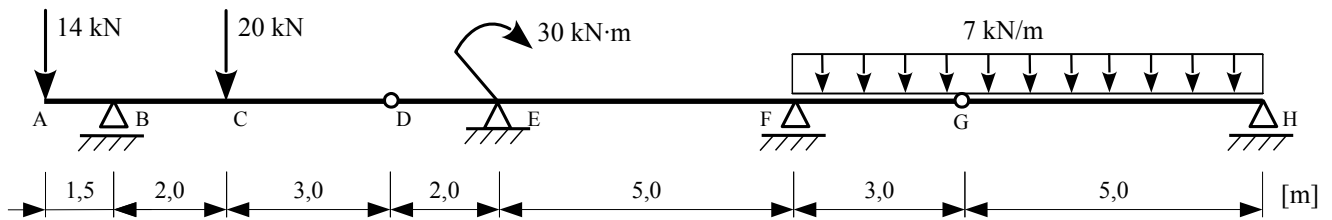


1. Schemat belki



2. Dyskusja geometrycznej niezmienności układu

2.1. Warunek konieczny

$$s = 3 \cdot t - r$$

gdzie: s – liczba stopni swobody układu,

t – liczba tarcz sztywnych,

r – liczba stopni swobody odbieranych przez więzy.

Rozpatrywana belka składa się z trzech belek prostych, czyli z trzech tarcz sztywnych: AD, DG, GH; w układzie występują: dwa przeguby (każdy z nich odbiera dwa stopnie swobody), trzy podpory przegubowo-przesuwne (odbierające po jednym stopniu swobody) oraz jedna podpora przegubowo-nieprzesuwna (odbierająca dwa stopnie swobody), zatem:

$$t = 3$$

$$r = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 9$$

$$s = 3 \cdot 3 - 9 = 0$$

Liczba stopni swobody całej belki wynosi zero, więc jest spełniony warunek konieczny geometrycznej niezmienności.

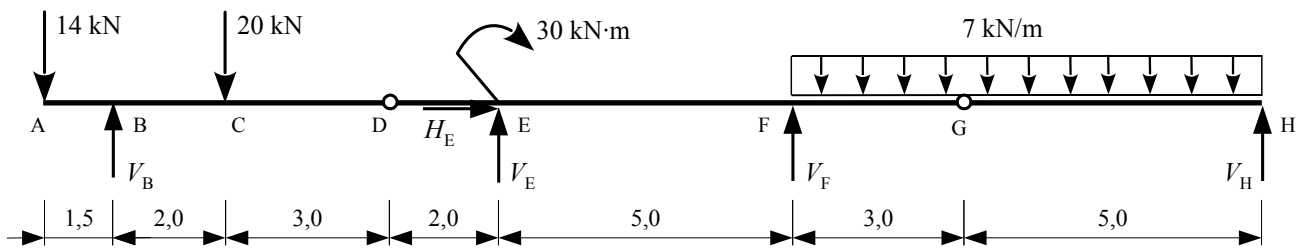
2.2. Warunek dostateczny

- Tarcza sztywna DG połączona jest z podłożem za pomocą podpory przegubowo-przesuwnej w punkcie F i podpory przegubowo-nieprzesuwnej w punkcie E. Punkt E nie leży na kierunku reakcji w podporze przegubowo-przesuwnej, zatem tarcza DG jest geometrycznie niezmienna i może stanowić podłoże dla pozostałych tarcz sztywnych.
- Tarcza GH jest połączona przegubem G z geometrycznie niezmienną tarczą DG oraz z podłożem za pomocą podpory przegubowo-przesuwnej w punkcie H. Przegub G nie leży na kierunku reakcji w podporze przegubowo-przesuwnej, zatem tarcza GH jest geometrycznie niezmienna i może stanowić podłoże dla pozostałych tarcz sztywnych.
- Tarcza AD jest połączona przegubem D z geometrycznie niezmienną tarczą DG oraz z podłożem za pomocą podpory przegubowo-przesuwnej w punkcie B. Przegub D nie leży na kierunku reakcji w podporze przegubowo-przesuwnej, zatem tarcza AD jest geometrycznie niezmienna.

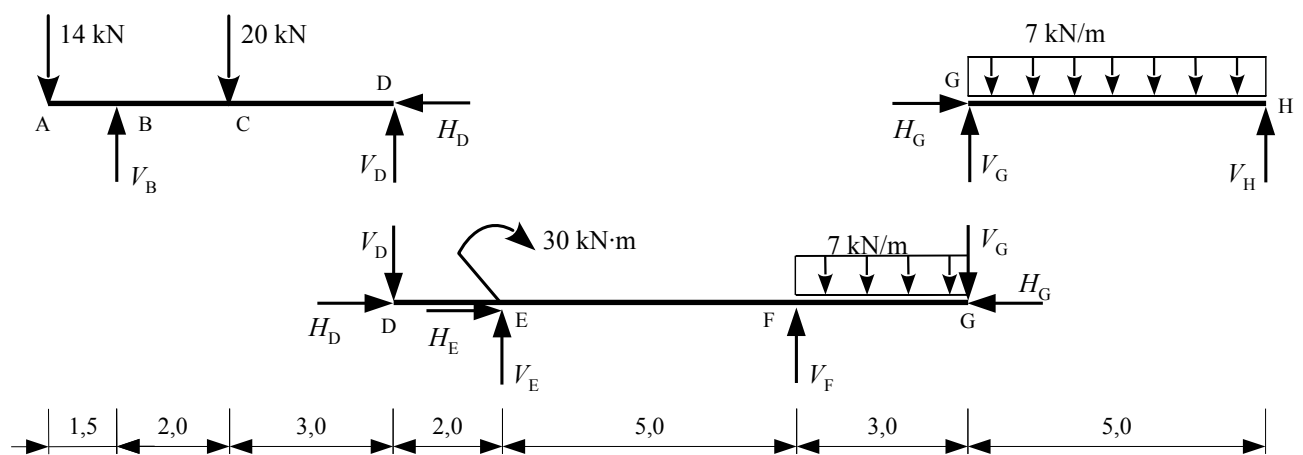
Wniosek: cały układ jest geometrycznie niezmienny.

3. Wyznaczenie reakcji więzów

3.1. Belka uwolniona od więzów z podłożem

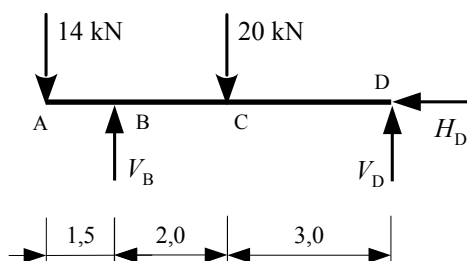


3.2. Rozkład na belki proste



3.3. Wyznaczenie sił reakcji w więzach

a) reakcje dla belki AD



$$\Sigma P_x = 0$$

$$H_D = 0$$

$$\Sigma M_D = 0$$

$$14 \cdot 6,5 - V_B + 20 \cdot 3 = 0$$

$$V_B = 30,2 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-14 - 20 + V_B + V_D = 0$$

$$-14 - 20 + 30,2 + V_D = 0$$

$$V_D = 3,8 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

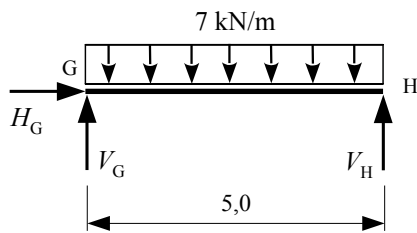
$$\Sigma M_A = 0$$

$$-V_B \cdot 1,5 + 20 \cdot 3,5 - V_D \cdot 6,5 = 0$$

$$-30,2 \cdot 1,5 + 20 \cdot 3,5 - 3,8 \cdot 6,5 = 0$$

$$0 = 0$$

b) reakcje dla belki GH



$$\Sigma P_x = 0$$

$$H_G = 0$$

$$\Sigma M_G = 0$$

$$-5 \cdot V_H + 7 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0$$

$$V_H = 17,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$V_G - 7 \cdot 5 + V_H = 0$$

$$V_G - 7 \cdot 5 + 17,5 = 0$$

$$V_G = 17,5 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

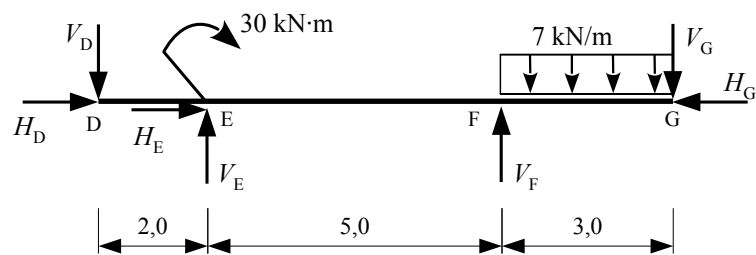
$$\Sigma M_H = 0$$

$$-5 \cdot V_G + 7 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0$$

$$-5 \cdot 17,5 + 7 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0$$

$$0 = 0$$

c) reakcje dla belki DG



$$\Sigma P_x = 0$$

$$H_D + H_E - H_G = 0$$

$$H_E = 0$$

$$\Sigma M_F = 0$$

$$-V_D \cdot 7 + 30 + V_E \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 1,5 + V_G \cdot 3 = 0$$

$$-3,8 \cdot 7 + 30 + V_E \cdot 5 + 21 \cdot 1,5 + 17,5 \cdot 3 = 0$$

$$V_E = -17,48 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-V_D + V_E + V_F - 7 \cdot 3 - V_G = 0$$

$$-3,8 - 17,48 + V_F - 21 - 17,5 = 0$$

$$V_F = 59,78 \text{ kN}$$

Sprawdzenie:

$$\Sigma M_G = 0$$

$$-V_D \cdot 10 + V_E \cdot 8 + 30 + V_F \cdot 3 - 7 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$$

$$-3,8 \cdot 10 - 17,48 \cdot 8 + 30 + 59,78 \cdot 3 - 21 \cdot 1,5 = 0$$

$$0 = 0$$

3.4. Sprawdzenie globalne – dla całego układu:

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-14 - 20 - 7 \cdot 8 + V_B + V_E + V_F + V_H = 0$$

$$-14 - 20 - 56 + 30,2 - 17,48 + 59,78 + 17,5 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\Sigma M_F = 0$$

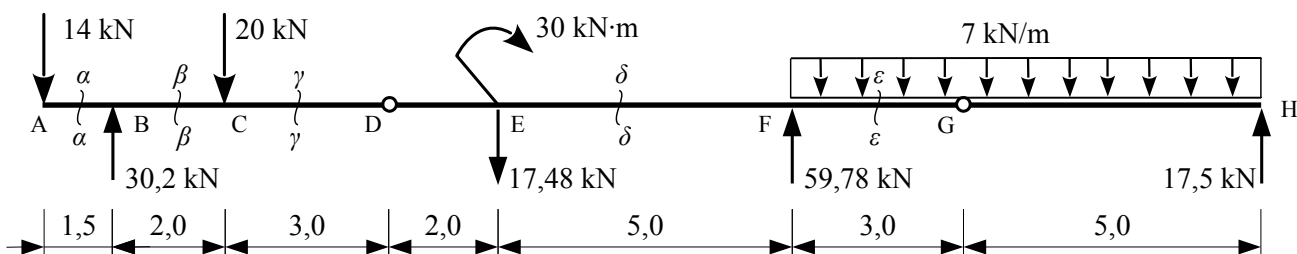
$$-14 \cdot 21,5 + V_B \cdot 20 - 20 \cdot 18 + V_E \cdot 13 + 30 + V_F \cdot 8 - 7 \cdot 8 \cdot 4 = 0$$

$$-14 \cdot 21,5 + 30,2 \cdot 20 - 20 \cdot 18 - 17,48 \cdot 13 + 30 + 59,78 \cdot 8 - 224 = 0$$

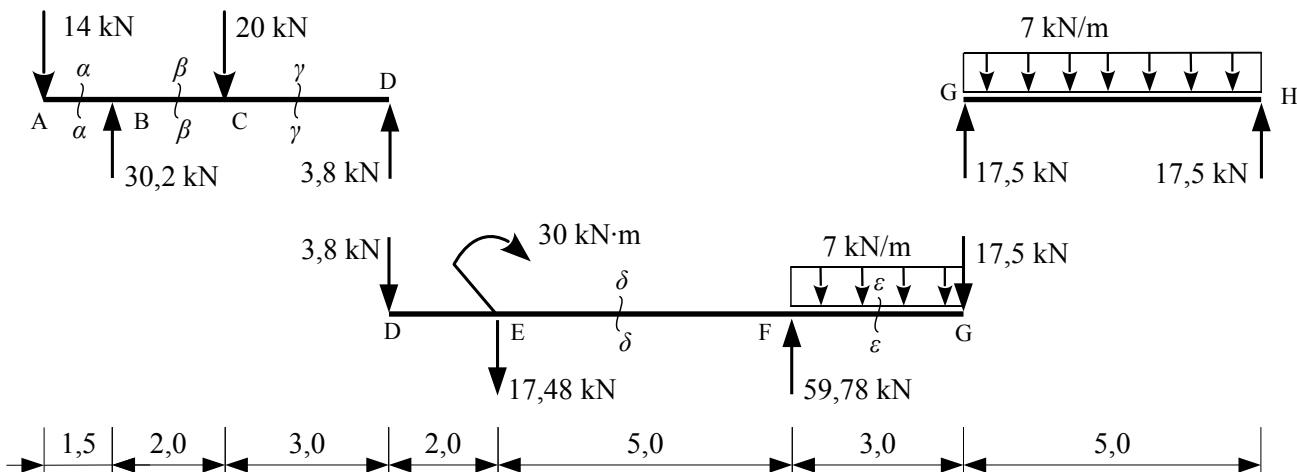
$$0 = 0$$

4. Zestawienie sił czynnych i biernych działających na belkę

4.1. Cała belka



4.2. Belka podzielona na belki proste

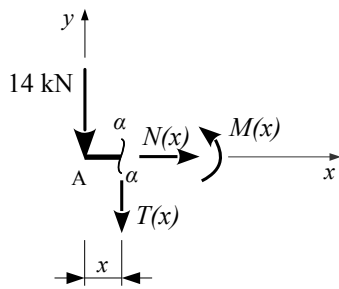


Na rysunkach (p.4.1 i p.4.2) zaznaczono wszystkie niezbędne miejsca, w których należy dokonać myślowego cięcia, aby z równań równowagi odciętej części belki wyznaczyć siły wewnętrzne dla poszczególnych odcinków belki (przekroje od α - α do ε - ε), przy czym przekrój γ - γ można zrobić w dowolnym punkcie odcinka CE, a więc również za przegubem D, a przekrój ε - ε w dowolnym punkcie odcinka FH, a więc również za przegubem G, na odcinku GH.

5. Wyznaczenie sił wewnętrznych

5.1. Funkcje sił wewnętrznych na odcinku AB (z warunków równowagi dla odciętej części A- α):

$$x \in <0; 1,5>$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-T(x) - 14 = 0$$

$$T(x) = -14,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\alpha = 0$$

$$M(x) - 14 \cdot x = 0$$

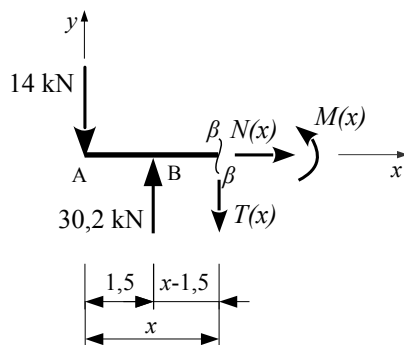
$$M(x) = -14 \cdot x$$

$$M_A(0) = 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_B(1,5) = -21,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

5.2. Funkcje sił wewnętrznych na odcinku BC (z warunków równowagi dla odciętej części A- β):

$$x \in <1,5; 3,5>$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$T(x) + 14 - 30,2 = 0$$

$$T(x) = 16,2 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\beta = 0$$

$$M(x) + 14 \cdot x - 30,2 \cdot (x - 1,5) = 0$$

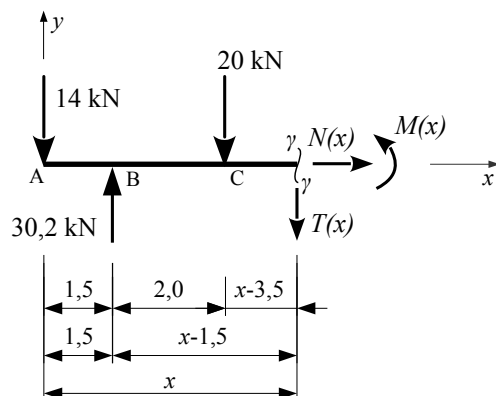
$$M(x) = 16,2 \cdot x - 45,3$$

$$M_B(1,5) = -21,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_C(3,5) = 11,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

5.3. Funkcje sił wewnętrznych na odcinku CE (z warunków równowagi dla odciętej części A- γ):

$$x \in <3,5; 8,5>$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$T(x) + 14 + 20 - 30,2 = 0$$

$$T(x) = -3,8 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\gamma = 0$$

$$M(x) + 14 \cdot x - 30,2 \cdot (x - 1,5) + 20 \cdot (x - 3,5) = 0$$

$$M(x) = -3,8 \cdot x + 24,7$$

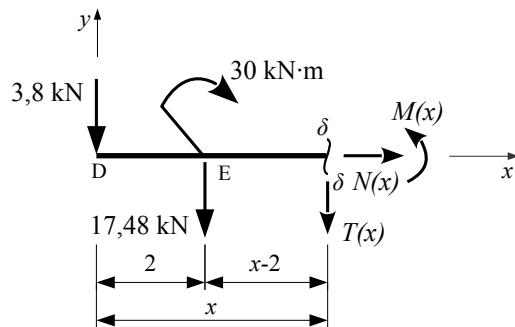
$$M_C(3,5) = 11,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_D(6,5) = 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_E(8,5) = -7,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Lub prościej – z warunków równowagi dla odciętej części γ -D:

$$x \in \langle 3,0; -2,0 \rangle$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-T(x) - 3,8 = 0$$

$$T(x) = -3,8 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\gamma = 0$$

$$-M(x) + 3,8 \cdot x = 0$$

$$M(x) = 3,8 \cdot x$$

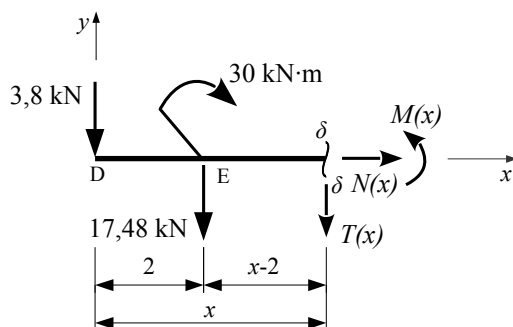
$$M_C(3,0) = 11,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_D(0,0) = 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_E(-2,0) = -7,6 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

5.4. Funkcje sił wewnętrznych na odcinku EF (z warunków równowagi dla odciętej części D- δ):

$$x \in \langle 2,0; 7,0 \rangle$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$T(x) + 3,8 + 17,48 = 0$$

$$T(x) = -21,28 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\delta = 0$$

$$M(x) + 3,8 \cdot x + 17,48 \cdot (x - 2) - 30 = 0$$

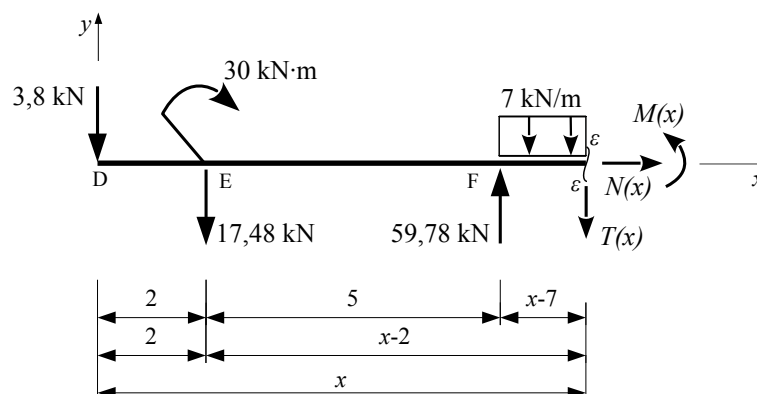
$$M(x) = -21,28 \cdot x + 64,96$$

$$M_E(2,0) = 22,4 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_F(7,0) = -84,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

5.5. Funkcje sił wewnętrznych na odcinku FH (z warunków równowagi dla odciętej części D- ϵ):

$$x \in \langle 7,0; 15,0 \rangle$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$T(x) + 3,8 + 17,48 - 59,78 + 7 \cdot (x-7) = 0$$

$$T(x) = -7 \cdot x + 87,5$$

$$T_F(7,0) = 38,5 \text{ kN}$$

$$T_G(10,0) = 17,5 \text{ kN}$$

$$T_H(15,0) = -17,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\varepsilon = 0$$

$$M(x) + 3,8 \cdot x + 17,48 \cdot (x-2) - 30 - 59,78 \cdot (x-7) + 7 \cdot (x-7) \cdot 0,5 \cdot (x-7) = 0$$

$$M(x) = -3,5 \cdot x^2 + 87,5 \cdot x - 525$$

$$M_F(7,0) = -84,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_G(10,0) = 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_H(15,0) = 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Wyznaczenie wartości ekstremalnej momentu zginającego

$$T(x) = 0$$

$$-7 \cdot x + 87,5 = 0$$

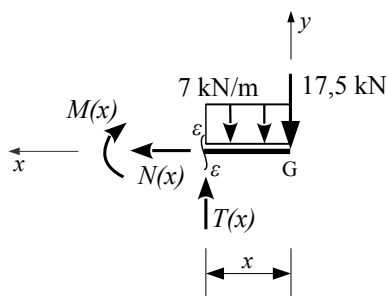
$$x = 12,5 \text{ m}$$

$$M(12,5) = -3,5 \cdot 12,5^2 + 87,5 \cdot 12,5 - 525 = 21,875 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

W przypadku tego odcinka belki pokazany powyżej sposób wyznaczenia funkcji sił wewnętrznych nie jest najszybszy. Prościej byłoby rozpatrzyć równowagę odcinka ε -G lub zrobić cięcie ε - ε na odcinku GH. Poniżej przedstawiono obydwa warianty rozwiązania.

Funkcje sił wewnętrznych na odcinku FH (z warunków równowagi dla odciętej części ε -G):

$$x \in \langle 3,0; -5,0 \rangle$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$-T(x) + 7 \cdot x + 17,5 = 0$$

$$T(x) = 7 \cdot x + 17,5$$

$$T_F(3,0) = 38,5 \text{ kN}$$

$$T_G(0,0) = 17,5 \text{ kN}$$

$$T_H(-5,0) = -17,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\varepsilon = 0$$

$$-M(x) - 7 \cdot x \cdot 0,5 \cdot x - 17,5 \cdot x = 0$$

$$M(x) = -3,5 \cdot x^2 - 17,5 \cdot x$$

$$M_F(3,0) = -84,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_G(0,0) = 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_H(-5,0) = 0,0 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Wyznaczenie wartości ekstremalnej momentu zginającego

$$T(x) = 0$$

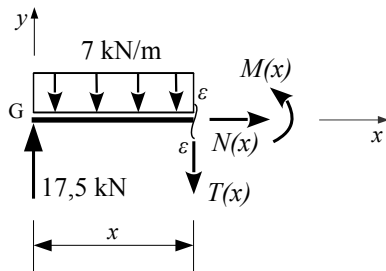
$$7 \cdot x + 17,5 = 0$$

$$x = -2,5 \text{ m}$$

$$M(-2,5) = -3,5 \cdot (-2,5)^2 - 17,5 \cdot (-2,5) = 21,875 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Funkcje sił wewnętrznych na odcinku FH (z warunków równowagi dla odciętej części G-ε):

$$x \in \langle -3,0; 5,0 \rangle$$



$$\Sigma P_x = 0$$

$$N(x) = 0,0 \text{ kN}$$

$$\Sigma P_y = 0$$

$$T(x) + 7 \cdot x - 17,5 = 0$$

$$T(x) = -7 \cdot x + 17,5$$

$$T_F(-3,0) = 38,5 \text{ kN}$$

$$T_G(0,0) = 17,5 \text{ kN}$$

$$T_H(5,0) = -17,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_\varepsilon = 0$$

$$M(x) + 7 \cdot x \cdot 0,5 \cdot x - 17,5 \cdot x = 0$$

$$M(x) = -3,5 \cdot x^2 + 17,5 \cdot x$$

$$M_F(-3,0) = -84,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_G(0,0) = 0,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_H(5,0) = 0,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Wyznaczenie wartości ekstremalnej momentu zginającego

$$T(x) = 0$$

$$-7 \cdot x + 17,5 = 0$$

$$x = 2,5 \text{ m}$$

$$M(2,5) = -3,5 \cdot 2,5^2 + 17,5 \cdot 2,5 = 21,875 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

6. Wykresy sił wewnętrznych

